Hermann Þórisson

# INNGANGUR að LÍKINDAFRÆÐI

## YFIRLIT

Þetta hefti byggir á heftinu LÍKINDAREIKNINGUR
Saman mynda þau grunn að heftunum
SLEMBIFERLI og GRUNDVÖLLUR LÍKINDAFRÆÐINNAR

**Myndskeiðin iL01-iL33** byggja á þessu hefti

*Um túlkun og sögu líkinda* er úr ritinu Vísindavefur
Ritgerðasafni til heiðurs Þorsteini Vilhjálmssyni sjötugum

Æviágrip *Pascal*, *Leibniz*, *Bernoulli* og *Kolmogorov* eru af Vísindavefnum

Birt hér með góðfúslegu leyfi

Prentun: Háskólaprent, 2022

# LÍKINDI 1

---

## Yfirlit yfir myndskeið og efni

| Skeið | lengd | síður | efni |
|---|---|---|---|
| iL01 | 12:21 | 1 | Líkindarúm |
| iL02 | 5:53 | 2-4 | Reglur 1-5 |
| iL03 | 6:18 | 5-6 | Reglur 6-7 |
| iL04 | 7:24 | 7-8 | Líkindi samatburða – Húfur |
| iL05 | 11:52 | 8 | Húfurnar |
| iL06 | 14:57 | 9 | Samfelldni líkinda |
| iL07 | 3:16 | 10 | Boole ójafnan |

---

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

| | |
|---|---|
| iL01 | fyrsta myndskeið |
| 11:25 | 11 mínútur og 25 sekúndur |
| 1 | fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit** |

# Líkindarúm – $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

Látum $\Omega \neq \varnothing$ vera mengi. Safn hlutmengja $\mathcal{F}$ úr menginu $\Omega$ kallast ***$\sigma$-algebra*** ef eftirfarandi gildir:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(b) ef $A \in \mathcal{F}$ þá er $A^c \in \mathcal{F}$,

(c) ef $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ þá er $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Af (b) og (c) leiðir að ef $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ þá $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**Þar eð** $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \overset{(b)}{\Longrightarrow} A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{F} \overset{(c)}{\Longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F} \overset{(b)}{\Longrightarrow} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Af (a) og (b) leiðir að $\varnothing \in \mathcal{F}$. **Þar eð** $\varnothing = \Omega^c \overset{(a)\,(b)}{\Longrightarrow} \varnothing \in \mathcal{F}$.

Af (c) og $\varnothing \in \mathcal{F}$ leiðir að ef $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ þá er $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, sem ásamt (b) gefur að $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

**Þar eð** $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \overset{\varnothing \in \mathcal{F}\,(c)}{\Longrightarrow} A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$. **Og** $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

---

Mengi $A_1, A_2, \ldots$ eru ***sundurlæg*** ef $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$.

---

Fall $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ kallast ***líkindi*** (eða ***líkindamál***) ef

(I) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

(II) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0, \quad A \in \mathcal{F}$,

(III) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ sundurlæg

$$\Rightarrow \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

---

Þá kallast $\Omega$ ***útkomumengi*** og $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ***líkindarúm***. Og stökin $A \in \mathcal{F}$ kallast ***atburðir***.

---

Ath: Í ***Lík og töl*** er látið ónefnt að líkindi $\mathbf{P}(A)$ þurfa ekki að vera skilgreind fyrir öll hlutmengi úr $\Omega$. Það dugar að líkindi séu skilgreind fyrir heppilegt safn hlutmengja úr $\Omega$, þ.e. fyrir heppilegt $\mathcal{F}$.
Við ræðum þetta lauslega fljótlega.

---

# Nokkrar einfaldar reglur um líkindi

**Setning:** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm gildir eftirfarandi fyrir $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ og heilar tölur $n > 1$:

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

(2) Ef $A \cap B = \varnothing$ þá gildir $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
Sér í lagi gildir að $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) Ef $A_1, \ldots A_n$ eru sundurlægir þá gildir

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(4) Ef $A \subseteq B$ þá gildir $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

(5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

(6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(7) ***Boole-ójafnan***: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

---

**Sönnun á (1):** Takið eftir að $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$ og að atburðirnir $\Omega, \varnothing, \varnothing, \ldots$ eru sundurlægir.
Því gefur (III) að $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}(\varnothing) + \ldots$
Því er $\mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}(\varnothing) + \ldots = 0$ og þar með $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

---

Sannanir á (2) - (7) eru á næstu fjórum glærum.

# Sönnun á (2) og (3)

**Setning:** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm gildir eftirfarandi fyrir $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ og heilar tölur $n > 1$:

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

(2) Ef $A \cap B = \varnothing$ þá gildir $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
Sér í lagi gildir að $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) Ef $A_1, \ldots A_n$ eru sundurlægir þá gildir

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(4) Ef $A \subseteq B$ þá gildir $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

(5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

(6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(7) ***Boole-ójafnan***: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

**Sönnun á (2):** Fyrri hlutinn er sértilvik af lið (3) með $n = 2$. Síðari hlutinn fæst með því að taka $B = A^c$ og nota (I) sem gefur $\mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

**Sönnun á (3):** Ef $A_1, \ldots, A_n$ eru sundurlægir eru $A_1, \ldots, A_n, \varnothing, \varnothing, \ldots$ sundurlægir. Því gefur (III) ásamt $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$ að

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}(\varnothing + \ldots$$

Samkvæmt (1) er $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ svo

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

# Sönnun á (4) og (5)

**Setning:** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm gildir eftirfarandi fyrir $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ og heilar tölur $n > 1$:

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

(2) Ef $A \cap B = \varnothing$ þá gildir $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
Sér í lagi gildir að $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) Ef $A_1, \ldots A_n$ eru sundurlægir þá gildir

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(4) Ef $A \subseteq B$ þá gildir $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

(5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

(6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(7) ***Boole-ójafnan***: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

---

**Sönnun á (4):** Ef $A \subseteq B$ þá er $B = A \cup (B \setminus A)$. Þetta ásamt $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ og (2) gefur

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \setminus A) + \mathbf{P}(A).$$

Samkvæmt (II) er $\mathbf{P}(B \setminus A) \geqslant 0$ svo $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$.

---

**Sönnun á (5):** Notum (4) með $B = \Omega$. Þar eð $A \subseteq \Omega$ fæst $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(\Omega)$. Og samkvæmt (I) er $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

---

# Sönnun á (6)

**Setning:** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm gildir eftirfarandi fyrir $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ og heilar tölur $n > 1$:

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

(2) Ef $A \cap B = \varnothing$ þá gildir $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
Sér í lagi gildir að $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) Ef $A_1, \ldots A_n$ eru sundurlægir þá gildir

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(4) Ef $A \subseteq B$ þá gildir $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

(5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

(6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(7) ***Boole-ójafnan***: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

**Sönnun á (6):** Tökum eftir að

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ **og** $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Þetta ásamt (2) gefur $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \setminus A)$,
þ.e.

$$\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \qquad (*)$$

Tökum því næst eftir að

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \ \text{ og } \ A \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

Þetta ásamt (2) gefur $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A)$.
Þegar við setjum hér inn $(*)$ fæst

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

# Sönnun á (7)

**Setning:** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm gildir eftirfarandi fyrir $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ og heilar tölur $n > 1$:

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

(2) Ef $A \cap B = \varnothing$ þá gildir $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
Sér í lagi gildir að $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) Ef $A_1, \ldots A_n$ eru sundurlægir þá gildir

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(4) Ef $A \subseteq B$ þá gildir $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

(5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

(6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(7) ***Boole-ójafnan***: $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

**Sönnun á (7):** Notum þrepun yfir $n$.
Samkvæmt (6) og (II) höfum við

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \qquad (*)$$

Þannig að $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ gildir fyrir $n = 2$.
Gerum ráð fyrir að þetta gildi fyrir gefið $n \geqslant 2$.
Úr $(*)$ fæst að $\mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) + \mathbf{P}\big(A_{n+1}\big)$
og þrepunarforsendan gefur

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big(A_i\big) + \mathbf{P}\big(A_{n+1}\big).$$

Þrepun gefur nú $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ fyrir $n > 1$.

# Regla um líkur á samatburðum

**Munið:** (6) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Óformleg útleiðsla á (6): Hugsum um líkindi sem massa sem dreifður er yfir $\Omega$. Til að finna massann á $A \cup B$ leggjum við fyrst saman massana á $A$ og $B$. En þá höfum við tekið massann á $A \cap B$ með tvisvar og þurfum að draga hann frá einu sinni.

Til að finna massann á $A \cup B \cup C$ leggjum við fyrst saman massana á $A$, $B$ og $C$. Þá höfum við tekið massana á $A \cap B$, $B \cap C$ og $A \cap C$ með tvisvar og þurfum að draga þá frá einu sinni. En þá hefur massinn á $A \cap B \cap C$ komið með þrisvar og verið dreginn frá þrisvar svo við þurfum að leggja hann við einu sinni. Þessi óformlega útleiðsla bendir til að

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \ & \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\ & - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap C) \\ & + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Almennt má finna massann á $\bigcup_{i=1}^n A_i$ með því að leggja fyrst saman massana á öllum atburðunum, draga svo frá massana á tvítöldum sniðum $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ o.s.frv. þannig að á víxl eru lagðir við vantaldir massar og dregnir frá oftaldir.

**Setning** (Formleg þrepunarsönnun er í iL-heftinu.) Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm og $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ gildir

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

# Dæmi 1. Húfur

Hér á árum áður gengu nemendur við verkfræðiháskólann í Gautaborg með húfur sem líktust stúdentshúfum með áhengdu svörtu skotti. Eitt sinn sem endra nær mæta þeir til árshátíðar og kasta þá húfum sínum í hrúgu við innganginn. Þegar þeir svo halda heimleiðis taka þeir húfu af handhófi úr hrúgunni. Látum $n$ vera fjölda nemenda á árshátíðinn. Hverjar eru líkurnar $p_n$ á að einhver þeirra fari heim með sína húfu? Ákvarðið líka $\lim_{n\to\infty} p_n$.

**Lausn:** Setjum $\Omega =$ allar umraðanir $\pi$ á $\{1, \ldots, n\}$. Látum $\mathbf{P}$ vera jafnar líkur á $\mathcal{F} =$ öll hlutmengi $\Omega$. Skilgreinum atburði fyrir nemendur $i = 1, \ldots, n$:

$$A_i = \{\pi : \pi(i) = i\} = \; i \text{ fer heim með sína húfu.}$$

Þá er

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{einhver fer heim með sína húfu.}$$

Notum

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})\,.$$

Fjöldinn í $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ er $(n-k)!$ og fjöldinn í $\Omega$ er $n!$ svo $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})) = \frac{(n-k)!}{n!}$. Fjöldi liða í $\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n}$ er $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ svo $\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$.

Þetta gefur

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to 1 - e^{-1}$$

þegar $n \to \infty$, vegna þess að $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

# Líkindi eru samfellt mengjafall

Fyrir atburði $A_1, A_2, \ldots$ skrifum við

$$A_n \downarrow A,\ n \to \infty, \text{ ef } A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \text{ og } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A,$$

$$A_n \uparrow A,\ n \to \infty, \text{ ef } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \text{ og } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A.$$

**Setning:** Látum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vera líkindarúm.
Þá gildir eftirfarandi fyrir $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$:

1. Ef $A_n \downarrow \varnothing, n \to \infty$, þá $\mathbf{P}(A_n) \to 0,\ n \to \infty$.
2. Ef $A_n \downarrow A, n \to \infty$, þá $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A),\ n \to \infty$.
3. Ef $A_n \uparrow A,\ n \to \infty$, þá $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A),\ n \to \infty$.

**Sönnun:** 1. Ef $A_n \downarrow \varnothing,\ n \to \infty$, þá eru atburðirnir $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$ sundurlægir og $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$.
Samkvæmt (III) á glæru 1 er þá $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(B_k)$.

Þetta gefur $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) \to 0,\ n \to \infty$, því að $\mathbf{P}(A_1) < \infty$ svo $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) < \infty$.

2. Ef $A_n \downarrow A$ þá höfum við $A_n \setminus A \downarrow \varnothing$ svo 1. gefur að

$$\mathbf{P}(A_n \setminus A) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{$*$}$$

Þar eð $A \subseteq A_n$ er $A_n = A \cup (A_n \setminus A)$. Þar eð $A$ og $A_n \setminus A$ eru auk þess sundurlæg gefur (2) á glæru 2 að

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n \setminus A) + \mathbf{P}(A).$$

Þetta ásamt $(*)$ gefur $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ þegar $n \to \infty$.

3. Ef $A_n \uparrow A$ þá $A_n^c \downarrow A^c$ svo $\mathbf{P}(A_n^c) \to \mathbf{P}(A^c)$ skv. 2.
Skv. síðari hluta (2) á glæru 2 er $\mathbf{P}(A_n) = 1 - \mathbf{P}(A_n^c)$ sem ásamt $\mathbf{P}(A_n^c) \to \mathbf{P}(A^c)$ gefur $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$.

# Notkun á samfelldni líkinda

**Setning (Boole-ójafnan, óendanleg runa atburða):** Ef $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ er líkindarúm og $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ þá gildir

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

**Sönnun:** Samkvæmt Boole-ójöfnunni á síðu 2 gildir

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i), \quad n > 1. \tag{1}$$

Takið eftir að $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ þegar $n \to \infty$ þannig að samkvæmt lið **3.** í síðustu setningu gildir

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \to \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right), \quad n \to \infty.$$

Þetta ásamt (1) gefur niðurstöðuna vegna þess að

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i), \quad n \to \infty.$$

**Athugasemd** við sönnunina á lið **1.** á síðustu glæru.
Í sönnuninni var notað að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$. Til að sjá að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \supseteq A_n$ tökum $\omega \in A_n$. Þar eð $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \varnothing$ þá er til $m \geqslant n$ þannig að $\omega \in A_m$ og $\omega \notin A_{m+1}$.
Því er $\omega \in B_m$ og þá $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$ svo $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \supseteq A_n$.
Til að sjá að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subseteq A_n$ tökum við $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$.
Þá er til $m \geqslant n$ þannig að $\omega \in B_m$.
Þá er $\omega \in A_m \subseteq A_n$ sem gefur $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subseteq A_n$.
Svo $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$.

# LÍKINDI 2

## Yfirlit yfir myndskeið og efni



Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

iL01 fyrsta myndskeið

11:25 11 mínútur og 25 sekúndur

1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

# Meira um samfelldni líkinda

**Setning:** Látum $\mathcal{F}$ vera $\sigma$-algebru hlutmengja úr $\Omega$.
Ef fall $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ uppfyllir eftirfarandi skilyrði

(III*) $\quad A, B \in \mathcal{F}$ sundurlæg

$$\Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

(IV*) $\quad A_n \in \mathcal{F}$ og $A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mathbf{P}(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$

þá uppfyllir $\mathbf{P}$ þriðju frumsendu líkinda, þ.e.

(III) $\quad A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ sundurlæg

$$\Rightarrow \mathbf{P}\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

*Sönnun: Tökum sundurlæg $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ og $n > 2$.
Notum (III*) með $A = \bigcup_1^n A_i$ og $B = \bigcup_{n+1}^{\infty} A_i$ til að fá

$$\mathbf{P}\big(\textstyle\bigcup_1^{\infty} A_i\big) = \mathbf{P}\big(\bigcup_1^{n} A_i\big) + \mathbf{P}\big(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\big).$$

Notum (III*) með $A = \bigcup_1^{n-1} A_i$ og $B = A_n$ til að fá

$$\mathbf{P}\big(\textstyle\bigcup_1^{\infty} A_i\big) = \mathbf{P}\big(\bigcup_1^{n-1} A_i\big) + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\big(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\big).$$

Notum (III*) svo $n - 2$ sinnum í viðbót til að fá

$$\mathbf{P}\big(\textstyle\bigcup_1^{\infty} A_i\big) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\big(\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\big). \qquad (*)$$

Notum nú (IV*) ásamt $\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i \downarrow \varnothing$ til að fá

$$\mathbf{P}\big(\textstyle\bigcup_{n+1}^{\infty} A_i\big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Þetta ásamt $(*)$ og $\mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) \to \sum_1^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$
gefur

$$\mathbf{P}\,(\textstyle\bigcup_1^{\infty} A_i) = \sum_1^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

þ.e. $\mathbf{P}$ uppfyllir (III).

Samkvæmt (2) á glæru 2 og setningunum á næst-síðustu glæru og þessari, þá er $\mathbf{P}$ líkindi ef og aðeins ef $\mathbf{P}$ uppfyllir skilyrðin (I), (II), (III*) og (IV*).

# Hvers vegna þarf $\sigma$-algebruna $\mathcal{F}$ ?

Einfalda skýringin á að $\mathbf{P}$ þurfi ekki að vera skilgreint fyrir öll $A \subseteq \Omega$ er sú að til eru mörg $A$ sem við höfum enga þörf fyrir að ákvarða líkindi á.

Það er samt dýpri skýring á þessu. Hún er sú að ef $\mathbf{P}$ yrði að vera skilgreint fyrir öll $A \subseteq \Omega$ þá væru sum mikilvæg líkindi $\mathbf{P}$ einfaldlega ekki til.

Dæmi um þetta eru jafnar líkur á $\Omega = [0,1]$, þ.e.

$$\mathbf{P}(A) = \ell(A) = \text{lengd mengisins } A\,.$$

Lengdarfallið $\ell$ er skilgreint fyrir bil með

$$\ell([a,b)) = \ell([a,b]) = \ell((a,b] = \ell((a,b)) = b-a, \quad a \leqslant b,$$

og fyrir sammengi sundurlægra bila $A_1, A_2, \ldots$ með

$$\ell(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \ell(A_1) + \ell(A_2) + \ldots \qquad (*)$$

En hver er lengd $A$ sem ekki samsett úr bilum ?

Lengdarfall $\ell : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ ætti að uppfylla $(*)$ fyrir öll sundurlæg $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ (þannig fall er kallað mál) og þar að auki ætti lengd mengis $A \subset \mathbb{R}$ ekki að breytast við hliðrun, þ.e.

$$\ell(x+A) = \ell(A) \ \text{ ætti að gilda fyrir öll } x \in \mathbb{R}\,.$$

En nú er hægt að sanna að ef slíkt fall $\ell$ væri til hefði það í för með sér að til væri mengi $H \subseteq [0,1)$ sem uppfyllti hvorki $\ell(H) = 0$ né $\ell(H) > 0$. Mótsögn !

Hinsvegar er $\ell : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ til fyrir *Borel-mengin*,

$\mathcal{B}$ = minnsta $\sigma$-algebra sem inniheldur öll bil .

# Borel mengin $\mathcal{B}$ og slembistærðir

Á síðustu glæru kom fram að ekki er hægt að skilgreina lengd fyrir öll $A \subseteq \mathbb{R}$ en að hinsvegar sé lengd til ef við takmörkum okkur við *Borel-mengin*, þ.e.

$$\mathcal{B} = \text{minnsta } \sigma\text{-algebra sem inniheldur öll bil}\,.$$

Því eru jafnar líkur á $\Omega = [0, 1]$ til ef við veljum

$$\mathcal{F} = \text{öll hlutmengi } [0, 1] \text{ sem eru Borel-mengi}\,.$$

---

Látum nú aftur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vera ótilgreint líkindarúm.

Af sömu ástæðu og fjallað var um hér að framan þarf að takmarka slembistærðir við að vera föll

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

sem eru þannig að $\{X \leqslant x\}$ eru atburðir, þ.e.

$$\{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Þetta er forsenda þess að dreififall $X$, $F$, sé til vegna þess að

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Það kemur í ljós ef $\{X \leqslant x\}$ eru atburðir þá eru $\{X \in B\}$ líka atburðir fyrir öll Borelmengi $B$.

Því eru líkurnar $\mathbf{P}(X \in B)$ einnig til fyrir $B \in \mathcal{B}$.

---

Um þetta er fjallað ítarlega í námskeiðunum Mál- og tegurfræði + Grundvöllur líkindafræðinnar. Okkur nægir hér eftirfarandi vitneskja þaðan: Ef gefin eru dreififöll þá eru til óháðar slembistærðir með þau dreififöll. Sama gildir um líkindaföll og þéttleika.

---

# Dreififöll $F$

**Setning:** Ef $F$ er ***dreififall*** slembistærðar $X$, þ.e.

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R},$$

þá gildir

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant F(y) \leqslant 1, \quad x < y.$
2. $F(x) \to 0, \ x \to -\infty.$
3. $F(x) \to 1, \ x \to \infty.$
4. $F$ er samfellt frá hægri: $F(y) \to F(x), \ y \downarrow x.$

**Sönnun:** **1.** Ef $x \leqslant y$ þá er $\{X \leqslant x\} \subseteq \{X \leqslant y\}$ svo (4) á glæru 2 gefur $F(x) \leqslant F(y)$.

Af (II) á glæru 1 leiðir að $0 \leqslant F(x)$.

Af (5) á glæru 2 leiðir að $F(y) \leqslant 1$.

**2.** Af lið 1. leiðir að $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n)$.

Þar eð $\{X \leqslant -n\} \downarrow \varnothing, \ n \to \infty$, gefur samfelldni líkinda svo að $\lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X \leqslant -n) = 0$.

**3.** Af lið 1. leiðir að $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n)$.

Þar eð $\{X \leqslant n\} \uparrow \Omega, \ n \to \infty$, gefur samfelldni líkinda svo að $\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X \leqslant n) = 1$.

**4.** Af lið 1. leiðir að $\lim_{y\downarrow x} F(y) = \lim_{n\to\infty} F(x+1/n)$. Þar eð $\{X \leqslant x + 1/n\} \downarrow \{X \leqslant x\}, \ n \to \infty$, gefur samfelldni líkinda svo að $\lim_{n\to\infty} F(x + 1/n) = F(x)$.

Fall $F$ sem uppfyllir skilyrðin 1.-4. kallast ***dreififall*** án tilvísunar til neinnar slembistærðar.

# Dreififöll $F$ – framhald

**Athugasemd:** Í lið 4. í sönnuninni hér á undan er notað að

$$\{X \leqslant x + 1/n\} \downarrow \{X \leqslant x\}, \quad n \to \infty.$$

Þetta stafar af því að $X(\omega) \leqslant x + 1/n$ fyrir öll $n \geqslant 1$ ef og aðeins ef $X(\omega) \leqslant x$.

**Setning:** Ef $F$ er dreififall slembistærðar $X$ gildir fyrir $x \in \mathbb{R}$ að

$$\mathbf{P}(X < x) = F(x-) := \lim_{y \uparrow x} F(y),$$

$$\mathbf{P}(X = x) = F(x) - F(x-).$$

**Sönnun:** Af lið 1. í síðustu setningu leiðir að

$$\lim_{y \uparrow x} F(y) = \lim_{n \to \infty} F(x - 1/n).$$

Þar eð $\{X \leqslant x - 1/n\} \uparrow \{X < x\}$ þegar $n \to \infty$, leiðir svo af samfelldni líkinda að

$$\lim_{n \to \infty} F(x - 1/n) = \mathbf{P}(X < x).$$

Þetta gefur fyrra atriðið.

Síðara atriðið leiðir af því fyrra og (2) á glæru 2,

$$F(x) - F(x-) = \mathbf{P}(X \leqslant x) - \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(X = x).$$

**Athugasemd:** Í sönnuninni er notað að

$$\{X \leqslant x - 1/n\} \uparrow \{X < x\}, \quad n \to \infty.$$

Þetta stafar af því að $X(\omega) \leqslant x - 1/n$ fyrir eitthvert $n \geqslant 1$ ef og aðeins ef $X(\omega) < x$.

# Skilyrt líkindi $\mathbf{P}(A \mid B)$

**Munið:** Ef $A$ og $B$ eru atburðir og $\mathbf{P}(B) > 0$ þá kallast

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

***skilyrtu líkurnar á*** $A$ ***gefið*** $B$.

**Setning:** Látum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vera líkindarúm og $B \in \mathcal{F}$ uppfylla $\mathbf{P}(B) > 0$. Skilgreinum fall $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{P}(A \mid B), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Þá er $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ líkindarúm.

**Sönnun:** Þurfum að sýna að $\mathbf{Q}$ uppfylli skilyrðin (I), (II) og (III). Fyrsta atriðið er uppfyllt vegna

$$\mathbf{Q}(\Omega) := \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

Annað atriðið er uppfylt því að $\mathbf{P}$ uppfyllir (II),

$$\mathbf{Q}(A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \geqslant 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Til að sýna að þriðja atriðið sé uppfyllt tökum við sundurlæg $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Þá eru $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots$ líka sundurlæg. Vegna þess að $\mathbf{P}$ uppfyllir (III) gefur þetta næst síðustu jöfnuna í

$$\mathbf{Q}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) := \frac{\mathbf{P}\big((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B\big)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\big)}{\mathbf{P}(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_i).$$

# Skilyrt líkindi – framhald

Munið: Ef $A$ og $B$ eru atburðir og $\mathbf{P}(B) > 0$ þá kallast

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

***skilyrtu líkurnar á*** $A$ ***gefið*** $B$.

Eftirfarandi setning segir að skilyrðing fyrst með $B$ og svo með $C$ er jafngild einni skilyrðingu með $B \cap C$.

Setning: Látum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vera líkindarúm og $B \in \mathcal{F}$ uppfylla $\mathbf{P}(B) > 0$. Látum $\mathbf{Q}$ vera líkindamálið úr síðustu setningu

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{P}(A \mid B), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Ef $C \in \mathcal{F}$ uppfyllir $\mathbf{Q}(C) > 0$ þá gildir

$$\mathbf{Q}(A \mid C) = \mathbf{P}(A \mid B \cap C), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Athugasemd: Tökum eftir að $\mathbf{P}(B) > 0$ og $\mathbf{Q}(C) > 0$ er jafngilt $\mathbf{P}(B \cap C) > 0$ því að $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{Q}(C)$.

Sönnun: Fyrir $A \in \mathcal{F}$ fæst

$$\mathbf{Q}(A \mid C) = \frac{\mathbf{Q}(A \cap C)}{\mathbf{Q}(C)} = \frac{\dfrac{\mathbf{P}(A \cap C \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}{\dfrac{\mathbf{P}(C \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(B \cap C)} = \mathbf{P}(A \mid B \cap C).$$

# VÆNTIGILDI

## Yfirlit yfir myndskeið og efni

| Skeið | lengd | síður | efni |
|---|---|---|---|
| iL14 | 3:55 | hliðarsíða 25 | Ómeðvitaði tölfræðingurinn |
| iL15 | 8:31 | 18 | Fylgnistuðull |
| iL16 | 9:55=4:39+5:16 | 19 | Pétursborgarþversögnin + Spjall |
| iL17 | 4:43 | 20 | Reykjavíkurþversögnin :-\| |
| iL18 | 10:06 | 21 | E[X\|Y=y] og E[X\|Y] |
| iL19 | 6:27 | 21-22 | E[E[X\|Y]] = E[X] |
| iL20 | 8:12=7:34+0:38 | 23 | Var[X\|Y] + Góð spurning |
| iL21 | – | Á töflu | Notkun E[X\|Y] og Var[X\|Y] |

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

iL01 fyrsta myndskeið

11:25 11 mínútur og 25 sekúndur

1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

# Fylgnistuðull $\quad -1 \leqslant \rho \leqslant 1$

**Látum $X$ og $Y$ hafa endanlegar *dreifnir***

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X] := \mathbf{E}\big[\big(X - \mathbf{E}[X]\big)^2\big]$$
$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}[Y] := \mathbf{E}\big[\big(Y - \mathbf{E}[Y]\big)^2\big]$$

***samdreifni***

$$\mathrm{Cov}[X,Y] := \mathbf{E}\big[\big(X - \mathbf{E}[X]\big)\big(Y - \mathbf{E}[Y]\big)\big]$$

**og *fylgnistuðul***

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

**Munið regluna um dreifni summu**

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X,Y]. \qquad (*)$$

**Setning:** $\quad -1 \leqslant \rho \leqslant 1$

**Sönnun:** **Með $\frac{X}{\sigma_X}$ í stað $X$ og $\frac{Y}{\sigma_Y}$ í stað $Y$ gefur $(*)$ fyrstu jöfnuna í**

$$0 \leqslant \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X}\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{Y}{\sigma_Y}\right] + 2\,\mathrm{Cov}\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right]$$
$$= \frac{\mathrm{Var}[X]}{\sigma_X^2} + \frac{\mathrm{Var}[Y]}{\sigma_Y^2} + 2\,\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = 1 + 1 + 2\,\rho \;\Rightarrow\; -1 \leqslant \rho$$

**Með $\frac{X}{\sigma_X}$ í stað $X$ og $\frac{-Y}{\sigma_Y}$ í stað $Y$ gefur $(*)$ fyrstu jöfnuna í**

$$0 \leqslant \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X} + \frac{-Y}{\sigma_Y}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X}\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{-Y}{\sigma_Y}\right] + 2\,\mathrm{Cov}\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{-Y}{\sigma_Y}\right]$$
$$= \frac{\mathrm{Var}[X]}{\sigma_X^2} + \frac{\mathrm{Var}[Y]}{(-\sigma_Y)^2} + 2\,\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{-\sigma_X \sigma_Y} = 1 + 1 - 2\,\rho \;\Rightarrow\; \rho \leqslant 1$$

# Dæmi 3. Péturborgarþversögnin

Manni nokkrum gefst kostur á að taka þátt í eftirfarandi leik fyrir þátttökugjald sem er $a$ krónur.

Peningi er kastað þangað til framhliðin kemur upp.

Gerist það í kasti númer $n$ vinnur hann $2^n$ krónur.

Hann ákveður að taka þátt í leiknum ef væntanlegur vinningur er hærri en kostnaðurinn $a$.

Hvað þarf þátttökugjaldið $a$ að vera hátt til að hann taki ekki þátt í leiknum?

Lausn: Vinningurinn er $X = 2^N$ þar sem

$N =$ fjöldi kasta þar til framhlið kemur upp.

Hann ætlar að taka þátt í leiknum ef

$$\mathbf{E}[X] > a.$$

Nú er $\mathbf{P}(N = n) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, svo

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, 2^{-n} = 1+1+\ldots = \infty.$$

Hann tekur því þátt í leiknum hvað sem það kostar.

Athugasemd:

Þetta olli Daníel Bernoulli áhyggjum á 18. öld, og fleirum við Pétursborgarakademíuna.

Athugasemd:

Hvað skyldi þetta segja okkur um væntigildi?

# Dæmi 3, viðbót. Reykjavíkurþversögnin :-|

Okkur gefst kostur á að fá greiddar $b$ krónur fyrir að taka þátt í eftirfarandi leik.

Peningi er kastað þangað til framhliðin kemur upp.

Gerist það í kasti númer $n$ töpum við $2^n$ krónum ef $n$ er oddatala en vinnum $2^n$ krónur ef $n$ er jöfn tala.

Við ákveðum að taka ekki þátt í leiknum nema við getum komist að þeirri niðurstöðu að væntanlegt tap sé minna en þókknunin $b$.

Hvað þarf þóknunin $b$ að vera há til að við tökum þátt í leiknum?

Lausn: Tapið er $Y = (-1)^{N+1}\, 2^N$ þar sem

$N =$ fjöldi kasta þar til framhlið kemur upp.

Við ætlum ekki að taka þátt í leiknum nema við getum komist að þeirri niðurstöðu að

$$\mathbf{E}[Y] < b\,.$$

Nú er $\mathbf{P}(N = n) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, svo $\mathbf{E}[Y]$ er ekki til:

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n\, 2^{-n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad \text{:-|}$$

Það er því ekki hægt að staðfesta að $\mathbf{E}[Y] < b$.

Við tökum ekki þátt í leiknum hvað sem er í boði.

Athugasemd:

Í líkindafræði er væntigildi leyft að vera $\mathbf{E}[X] = \infty$.

En svo eru til $Y$ þannig að $\mathbf{E}[Y]$ er ekki til, hvorki endanlegt né óendanlegt.

# Skilyrt væntigildi $\mathbf{E}[X \,|\, Y = y]$ og $\mathbf{E}[X \,|\, Y]$

Munið að þegar $X$ og $Y$ eru strjálar og $\mathbf{P}(Y = y) > 0$ þá er ***skilyrt líkindafall*** $X$ ***gefið*** $Y = y$ skilgreint

$$\mathbf{P}(X = x \mid Y = y) := \frac{\mathbf{P}(X = x,\, Y = y)}{\mathbf{P}(Y = y)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Skilgreining: Látum $X$ og $Y$ vera strjálar og $X$ hafa endanlegt væntigildi. Ef $\mathbf{P}(Y = y) > 0$ þá er ***skilyrt væntigildi*** $X$ ***gefið*** $Y = y$

$$\mathbf{E}[X \mid Y = y] := \sum_x x\, \mathbf{P}(X = x \mid Y = y)$$

Setjum líka $\mathbf{E}[X \mid Y = y] := 0$ ef $\mathbf{P}(Y = y) = 0$.

---

Munið að ef $X$ og $Y$ hafa samþéttleika $f$ og $f_Y(y) > 0$ þá er ***skilyrtur þéttleiki*** $X$ ***gefið*** $Y = y$ skilgreindur

$$f_{X|Y}(x \mid y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Skilgreining: Látum $X$ og $Y$ hafa samþéttleika $f$ og $X$ hafa endanlegt væntigildi. Ef $f_Y(y) > 0$ þá er ***skilyrt væntigildi*** $X$ ***gefið*** $Y = y$

$$\mathbf{E}[X \mid Y = y] := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x \mid y)\, dx$$

Setjum líka $\mathbf{E}[X \mid Y = y] := 0$ ef $f_Y(y) = 0$.

---

Skilgr: ***Skilyrt væntigildi*** $X$ ***gefið*** $Y$ er slembistærðin

$$\mathbf{E}[X \mid Y] := g(Y) \quad \text{þar sem} \quad g(y) = \mathbf{E}[X \mid Y = y].$$

---

Ath: $\mathbf{E}[X \mid Y]$ tekur gildið $\mathbf{E}[X \mid Y = y]$ þegar $Y = y$.

---

**Setning:** $\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \mathbf{E}[X]$

**Sönnun:** Samkvæmt skilgreiningu á $\mathbf{E}[X \mid Y]$ er

$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \mathbf{E}[g(Y)]$ þar sem $g(y) = \mathbf{E}[X \mid Y = y]$

Þegar $X$ og $Y$ eru strjálar gefur Lögmál ómeðvitaða tölfræðingsins að

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_y g(y)\,\mathbf{P}(Y = y)$$

sem ásamt $g(y) = \mathbf{E}[X \mid Y = y]$) gefur að

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_y \mathbf{E}[X \mid Y = y]\,\mathbf{P}(Y = y).$$

Skilgreiningin á $\mathbf{E}[X \mid Y = y]$ gefur nú

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_y \sum_x x\,\mathbf{P}(X = x \,|\, Y = y)\mathbf{P}(Y = y)$$

og skilgreiningin á $\mathbf{P}(X = x \mid Y = y)$ gefur svo að

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_y \sum_x x\,\mathbf{P}(X = x,\, Y = y).$$

Færum nú $\sum_y$ innfyrir $\sum_x$ ( það má vegna þess að $\mathbf{P}(X = x, Y = y) \leqslant \mathbf{P}(X = x)$ og $\sum_x |x|\mathbf{P}(X = x) < \infty$ )

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_x x \sum_y \mathbf{P}(X = x,\, Y = y).$$

Því er $\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\big] = \sum_x x\,\mathbf{P}(X = x) =: \mathbf{E}[X]$

Þegar $X$ og $Y$ hafa samþéttleika fæst á sama hátt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[X \mid Y = y] f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dx\right] f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx =: \mathbf{E}[X]\end{aligned}$$

# Skilyrt dreifni $\mathrm{Var}[X \mid Y = y]$ og $\mathrm{Var}[X \mid Y]$

**Skilgreining:** Látum $X$ hafa endanlegt væntigildi og dreifni. Þá er ***skilyrt dreifni*** $X$ ***gefið*** $Y = y$

$$\mathrm{Var}[X \mid Y = y] := \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}[X \mid Y = y]\right)^2 \mid Y = y\right]$$

og ***skilyrt dreifni*** $X$ ***gefið*** $Y$ er

$$\mathrm{Var}[X \mid Y] := \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}[X \mid Y]\right)^2 \mid Y\right]$$

Munið reiknireglunа $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$.
Á sama hátt og hún var sönnuð fæst

$$\mathrm{Var}[X \mid Y = y] = \mathbf{E}[X^2 \mid Y = y] - \mathbf{E}[X \mid Y = y]^2$$

og

$$\mathrm{Var}[X \mid Y] = \mathbf{E}[X^2 \mid Y] - \mathbf{E}[X \mid Y]^2. \tag{1}$$

**Setning:** $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}\left[\mathrm{Var}[X \mid Y]\right] + \mathrm{Var}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right]$

*Sönnun: Tökum væntigildi í (1) og notum svo $\mathbf{E}\left[\,\mathbf{E}[X^2 \mid Y]\,\right] = \mathbf{E}[X^2]$ til að fá

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{Var}[X \mid Y]\right] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]^2\right]. \tag{2}$$

Reiknireglan ( beitt á $\mathbf{E}[X \mid Y]$ í stað $X$ ) gefur

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]^2\right] - \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right]^2$$

sem ásamt $\mathbf{E}\left[\,\mathbf{E}[X \mid Y]\,\right] = \mathbf{E}[X]$ gefur

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]^2\right] - \mathbf{E}[X]^2. \tag{3}$$

Leggjum saman (2) og (3) og fáum

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{Var}[X \mid Y]\right] + \mathrm{Var}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Reiknireglan gefur nú

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{Var}[X \mid Y]\right] + \mathrm{Var}\left[\mathbf{E}[X \mid Y]\right] = \mathrm{Var}[X].$$

# STRJÁLAR STÆRÐIR

---

## Yfirlit yfir myndskeið og efni



---

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

iL01 fyrsta myndskeið

11:25 11 mínútur og 25 sekúndur

1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

# Happadrættisstærð $\quad X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$

Kúlur eru settar í kassa, $N$ hvítar og $M$ svartar.
Svo eru dregnar $n$ kúlur af handahófi án skila.
Hverjar eru líkurnar á að nákvæmlega $k$ séu hvítar?

---

Látum $X$ vera fjölda hvítra kúlna sem dregnar eru.
Til að fá $\{X = k\}$ þarf $k$ hvítar og $n - k$ svartar.
Hægt er að draga $k$ úr $N$ hvítum á $\binom{N}{k}$ marga vegu og $n - k$ úr $M$ svörtum á $\binom{M}{n-k}$ marga vegu.
Margföldunarreglan gefur
að hægt er að fá $\{X = k\}$ á $\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}$ marga vegu.
Heildarfjöldi möguleika á að draga $n$ úr $N + M$ er $\binom{N+M}{n}$ svo líkurnar á að fá nákvæmlega $k$ hvítar eru

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

þar sem $k$ uppfyllir $\max\{0, n - M\} \leqslant k \leqslant \min\{n, N\}$.

---

Stærð með þetta líkindafall kallast *happadrættistærð*

---

Setning: Látum $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$. Setjum $p = \frac{N}{N+M}$.
Þá gildir

$$\mathbf{E}[X] = np$$

$$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$$

---

# Happadrættisstærð – framhald

**Setning:** Látum $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$. Setjum $p = \frac{N}{N+M}$.

Þá er $\mathbf{E}[X] = np$ og $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$.

***Sönnun** (ítarlegri sönnun er í iL-heftinu): Látum $X_i$ vera 1 ef dregin kúla númer $i$ er hvít og 0 annars. Þá er

$$X := X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n).$$

Tökum eftir að $\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{N}{N+M} = p$ svo

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_n] = np.$$

Tökum eftir að ef $i \neq j$ þá er $\mathbf{P}(X_j = 1 | X_i = 1) = \frac{N-1}{N+M-1}$ svo

$$\mathbf{E}[X_i X_j] = \mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1) = p\,\frac{N-1}{N+M-1}.$$

Reiknireglan fyrir samdreifni gefur fyrsta skrefið í

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X_i, X_j] &= \mathbf{E}[X_i X_j] - \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j] \\
&= p\left(\frac{N-1}{N+M-1} - \frac{N}{N+M}\right) && \left(p = \frac{N}{N+M}\right) \\
&= p\,\frac{(N+M)(N-1)-(N+M-1)N}{(N+M)(N+M-1)} && \text{(gerum samnefnt)} \\
&= p\,\frac{-M}{(N+M)(N+M-1)} && \text{(lögum til)} \\
&= p\,(1-p)\,\frac{-1}{N+M-1}, \quad i \neq j, && \left(1 - p = \frac{M}{N+M}\right).
\end{aligned}$$

Notum nú regluna um dreifni summu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] \\
&= np(1-p) + n(n-1)p(1-p)\frac{-1}{N+M-1} \\
&= np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right).
\end{aligned}$$

# Summa óháðra strjálla stærða – Bin

Ef $X$ og $Y$ eru strjálar fæst líkindafall $X+Y$ svona:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=x) &= \textstyle\sum_r \mathbf{P}(X=r, X+Y=x)\\ &= \textstyle\sum_r \mathbf{P}(X=r, Y=x-r).\end{aligned}$$

Ef $X$ og $Y$ eru auk þess **óháðar** fæst

$$\mathbf{P}(X+Y=x) = \textstyle\sum_r \mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=x-r). \qquad (*)$$

Munið líkindafall $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$,

$$\mathbf{P}(X=k) = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,\ldots,n.$$

**Setning:** Látum $X$ og $Y$ vera óháðar. Ef

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \quad \text{og} \quad Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$$

þá er

$$X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p).$$

***Sönnun:** Í $(*)$ er $\mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=x-r) > 0$ aðeins ef $r \in \{0,\ldots,n\}$ og $x-r \in \{0,\ldots,m\}$ þ.e. aðeins ef $x \in \{0,\ldots,n+m\}$, $r \in \{0,\ldots,n\}$, $r \in \{x-m,\ldots,x\}$.
Notum nú þetta með $x = k \in \{0,\ldots,n+m\}$,

$$\mathbf{P}(X+Y=k)$$

$$= \sum_{r=\max\{0,k-m\}}^{r=\min\{n,k\}} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \binom{m}{k-r} p^{k-r} (1-p)^{m-(k-r)}$$

$$= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{r=\max\{0,k-m\}}^{r=\min\{n,k\}} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$$

Talningarfræðireglan hér neðst gefur nú

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \tbinom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

**Ath:** Án skila og án tillits til raðar má velja $r$ stök úr $n$ á $\binom{n}{r}$ vegu og $k-r$ úr $m$ á $\binom{m}{k-r}$. Því má velja $k$ úr $n+m$ á $\sum_r \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$ vegu, þ.e $\binom{n+m}{k} = \sum_r \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$.

## Summa óháðra strjálla stærða – Poi

Munið að ef $X$ og $Y$ eru strjálar og óháðar gildir

$$\mathbf{P}(X+Y=x)=\textstyle\sum_r \mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=x-r). \qquad (*)$$

Munið líkindafall $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$,

$$\mathbf{P}(X=k)=e^{-\lambda}\,\tfrac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,\ldots$$

Setning: Látum $X$ og $Y$ vera óháðar. Ef

$$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda) \quad \text{og} \quad Y \sim \mathrm{Poi}(\mu).$$

þá er

$$X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda+\mu).$$

Sönnun: Í $(*)$ er $\mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=x-r)>0$ aðeins ef $r\in\{0,1,\ldots\}$ og $x-r\in\{0,1,\ldots\}$ þ.e. aðeins ef $x\in\{0,1,\ldots\}$ og $r\in\{0,\ldots,x\}$.

Notum nú þetta með $x=k\in\{0,1,\ldots\}$,

$$\mathbf{P}(X+Y=k)=\sum_{r=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}\; e^{-\mu}\frac{\mu^{k-r}}{(k-r)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!(k-r)!}\,\frac{\lambda^r\mu^{k-r}}{(\lambda+\mu)^k}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}$$

Þar eð liðirnir í rauðu summunni eru líkindafall $\mathrm{Bin}\big(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big)$ þá er summan $=1$ svo við fáum

$$\mathbf{P}(X+Y=k)=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}.$$

## $(X \mid X+Y=r)$ — Hyp – Bin – Poi

Munið líkindafall $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$,

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

**Setning:** Látum $X$ og $Y$ vera óháðar og

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \quad \text{og} \quad Y \sim \mathrm{Bin}(m,p).$$

Þá er $(X \mid X+Y=r) \sim \mathrm{Hyp}(n,m,r)$ þ.e

$$\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=r) = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}}{\binom{n+m}{r}}.$$

**Sönnun:** Samkvæmt næst síðustu glæru er $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$. Þetta gefur fjórða skrefið í

$$\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=r) = \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=r)}{\mathbf{P}(X+Y=r)} = \frac{\mathbf{P}(X=k, Y=r-k)}{\mathbf{P}(X+Y=r)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=r-k)}{\mathbf{P}(X+Y=r)} = \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{m}{r-k}p^{r-k}(1-p)^{m-(r-k)}}{\binom{n+m}{r}p^r(1-p)^{n+m-r}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}}{\binom{n+m}{r}}$$

Munið líkindafall $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$,

$$\mathbf{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Setning:** Látum $X$ og $Y$ vera óháðar,

$$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda) \quad \text{og} \quad Y \sim \mathrm{Poi}(\mu).$$

Þá er $(X \mid X+Y=n) \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

**Sönnun:** Samkvæmt síðustu glæru er $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda+\mu)$. Þetta gefur fjórða skrefið í

$$\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbf{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

# Regla um væntigildi – Geo

**Setning:** Ef $X$ tekur aðeins gildi í $\{0, 1, 2, \ldots\}$ þá er

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

**Sönnun:** Notum að $k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{P}(X = k)$ til að taka annað skrefið í

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{P}(X = k).$$

Liðirnir eru ekki-neikvæðir svo við getum breytt röðinni á summunum

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

Munið líkindafall $X \sim \mathrm{Geo}(p)$,

$$\mathbf{P}(X = n) = p\,(1 - p)^{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots$$

sem er jafngilt $\mathbf{P}(X > n) = (1 - p)^n, \; n = 0, 1, \ldots$

**Setning:** Ef $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ þá er $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}$.

**Sönnun:**

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}$$

**Setning:** Ef $X$ er samfelld slembistærð og $f_X(x) = 0$ fyrir $x < 0$, þá er $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > x)dx$.

**Sönnun:** $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, f_X(x)dx = \int_0^\infty \left( \int_0^x f_X(x)dy \right) dx$

$$= \int_0^\infty \left( \int_y^\infty f_X(x)dx \right) dy = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > y)dy$$

# SAMFELLDAR STÆRÐIR

## Yfirlit yfir myndskeið og efni



Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

iL01 fyrsta myndskeið

11:25 11 mínútur og 25 sekúndur

1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

# Minnisleysi $\Leftrightarrow$ Exp

Munið að jákvæð slembistærð $X$ er *minnislaus* ef

$$\mathbf{P}(X > a + b) = \mathbf{P}(X > a)\mathbf{P}(X > b), \quad a, b > 0.$$

Tæki sem eldist ekki (er alltaf eins og nýtt meðan það er nothæft) er með minnislausan endingartíma.

Munið að $X$ er *veldisstærð* með stika $0 < \lambda < \infty$, ef $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, sem er jafngilt

$$\mathbf{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Þetta er táknað $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Setning: Ef $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ þá er $X$ minnislaus.

Sönnun: Fyrir $a, b > 0$ gildir

$$\mathbf{P}(X > a + b) = e^{-\lambda(a+b)} = e^{-\lambda a}e^{-\lambda b} = \mathbf{P}(X > a)\mathbf{P}(X > b).$$

Setningunni hér að ofan má snúa við

Setning: Ef $X$ er minnislaus þá er til $0 < \lambda < \infty$ þannig að $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Sönnun: Tökum $n \geqslant 1$ og setjum inn $b = (n-1)a$ í minnisleysis jöfnuna efst á glærunni

$$\mathbf{P}(X > na) = \mathbf{P}(X > a)\,\mathbf{P}(X > (n-1)a).$$

Með ítrekun fæst

$$(1) \qquad \mathbf{P}(X > na) = \mathbf{P}(X > a)^n, \qquad a > 0,\ n \geqslant 1.$$

Þetta má umskrifa

$$(2) \qquad \mathbf{P}(X > a) = \mathbf{P}(X > ma)^{\frac{1}{m}}, \qquad a > 0,\ m \geqslant 1.$$

Framhald á næstu glæru

# Minnisleysi $\Rightarrow$ Exp – framhald á sönnun

Búin að leiða út að minnisleysi hefur í för með sér

(1) $\quad \mathbf{P}(X > na) = \mathbf{P}(X > a)^n, \qquad a > 0,\ n \geqslant 1.$

(2) $\quad \mathbf{P}(X > a) = \mathbf{P}(X > ma)^{\frac{1}{m}}, \qquad a > 0,\ m \geqslant 1.$

Með $a = 1/n$ í (1) fæst $\mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > 1/n)^n$. Vegna þess að $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X > 1/n) = \mathbf{P}(X > 0) = 1$ er til $n$ þannig að $\mathbf{P}(X > 1/n) > 0$. Svo $\mathbf{P}(X > 1) > 0$.

Með $a = 1$ í (2) fæst $\mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > m)^{1/m}$. Vegna þess að $\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}(X > m) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$ er til $m$ þannig að $\mathbf{P}(X > m) < 1$. Svo $\mathbf{P}(X > 1) < 1$.

Við getum nú sett $\lambda = -\log \mathbf{P}(X > 1)$ og skrifað

(3) $\quad \mathbf{P}(X > 1) = e^{-\lambda} \quad$ þar sem $0 < \lambda < \infty$.

Með því að að setja $a = 1/m$ og nota fyrst (1) og svo (2) fæst fyrir heilar tölur $n$, $m \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(X > n/m) = \mathbf{P}(X > 1/m)^n = \mathbf{P}(X > 1)^{\frac{n}{m}}$$

sem ásamt (3) gefur

(4) $\quad \mathbf{P}(X > n/m) = e^{-\lambda\frac{n}{m}}, \qquad n, m \geqslant 1.$

Tökum nú $x > 0$ og heilar tölur $n_k$ og $m_k$ þannig að

$$n_1/m_1 \geqslant n_2/m_2 \geqslant \ldots > x \quad \text{og} \quad \lim_{k\to\infty} n_k/m_k = x.$$

Þegar $k \to \infty$ þá vex mengið $\{X > n_k/m_k\}$ upp í $\{X > x\}$ sem gefur $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(X > n_k/m_k) = \mathbf{P}(X > x)$.

Þetta ásamt $\lim_{k\to\infty} e^{-\lambda\frac{n_k}{m_k}} = e^{-\lambda x}$ og (4) gefur

$$\mathbf{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \qquad \text{þ.e. } X \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

# Gammastærðin — $X \sim \text{Gamma}(t, \lambda)$

Eftirfarandi fall $\Gamma$ kallast gammafall

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy, \quad t > 0.$$

Setning: $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1), \quad t > 1,$

og sér í lagi

$$\Gamma(n+1) = n\,! \quad \text{fyrir } n \geqslant 0.$$

Sönnun: Fyrri niðurstaðan fæst svona

$$\Gamma(t) = \big[-e^{-y} y^{t-1}\big]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y}(t-1)y^{t-2} dy$$

$$= (t-1)\int_0^\infty e^{-y} y^{t-2} dy = (t-1)\Gamma(t-1)\,.$$

Tökum svo eftir að

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1\,.$$

Með ítrekun fæst nú

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= \ldots = n\,!\,\Gamma(1) = n\,!$$

Aths: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,,$ sjá athugasemd undir lokin.

*Skilgreining: Slembistærð $X$ er *Gammastærð* með stika $t$, $\lambda > 0$ ef

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}, \quad x > 0.$$

Táknað $X \sim \text{Gamma}(t,\, \lambda)$.

Ath: $\text{Gamma}(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$.

## $X \sim \mathrm{Gamma}(t, \lambda) \;\Rightarrow\; \mathbf{E}[X] = \frac{t}{\lambda}$ og $\mathrm{Var}[X] = \frac{t}{\lambda^2}$

Munið að $X \sim \mathrm{Gamma}(t,\, \lambda)$ þýðir

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}, \quad x > 0,$$

þar sem

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy, \quad t > 0.$$

**Setning:** Ef $X \sim \mathrm{Gamma}(t, \lambda)$ þá er $\mathbf{E}[X] = \frac{t}{\lambda}$.

**Sönnun:** Samkvæmt setningunni á glærunni hér á undan er $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$. Þetta gefur lokaskrefið í

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1} dx$$

$$\overset{[y=\lambda x]}{=} \frac{1}{\lambda\Gamma(t)} \int_0^\infty e^{-y} y^t dy = \frac{\Gamma(t+1)}{\lambda\Gamma(t)} = \frac{t}{\lambda}$$

**Setning:** Ef $X \sim \mathrm{Gamma}(t, \lambda)$ þá er $\mathrm{Var}[X] = \frac{t}{\lambda^2}$.

**Sönnun:** Samkvæmt setningunni á glærunni hér á undan er $\Gamma(t+2) = (t+1)\Gamma(t+1) = t(t+1)\Gamma(t)$. Þetta gefur lokaskrefið í

$$\mathbf{E}[X^2] = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda\Gamma(t)} \int_0^\infty e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t+1} dx \qquad \text{(lagað til)}$$

$$\overset{[y=\lambda x]}{=} \frac{1}{\lambda^2\Gamma(t)} \int_0^\infty e^{-y} y^{t+1} dy = \frac{\Gamma(t+2)}{\lambda^2\Gamma(t)} = \frac{t(t+1)}{\lambda^2}$$

Því fæst

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{t(t+1)}{\lambda^2} - \frac{t^2}{\lambda^2} = \frac{t}{\lambda^2}.$$

# Staðlaða normlega stærðin $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

Munið að $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ þýðir að þéttleiki $Z$ er

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Setning: Fallið $f_Z$ er þéttleiki þ.e. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$

*Sönnun: Setjum $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Við þurfum að sýna að $I = \sqrt{2\pi}$ þ.e. að $I^2 = 2\pi$. Nú er

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right).$$

Færum x-tegrið (þ.e. töluna $I$) inn í y-tegrið og svo $e^{-\frac{1}{2}y^2}$ inn í x-tegrið. Þá fæst

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\right) dy$$

Skiptum nú yfir í pólhnit: $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Takið eftir að $x^2 + y^2 = r^2$ (munið $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$). Regla úr annars misseris stærðfræðigreiningu gefur

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} dr\right) d\theta$$

Reiknum ákveðuna (munið að $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\,\cos^2\theta + r\,\sin^2\theta = r\,.$$

Setjum þetta inn og skiptum um breytu $s = \frac{r^2}{2}$ :

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} r\, e^{-\frac{1}{2}r^2} dr\right) d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = 2\pi\,.$$

## $Z \sim N(0,1)$ — $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

**Setning:** Ef $Z \sim N(0,1)$ þá er $\mathbf{E}[Z] = 0$ og $\mathrm{Var}[Z] = 1$.

***Sönnun:** Með $y = \frac{1}{2}x^2$ fæst $\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1$.
Þar eð $\int_{-\infty}^0 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -1$ fæst því

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Með hluttegrun fæst

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Z] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left( x e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \Big[ -x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) dx = 1\,.
\end{aligned}$$

Munið $\mathrm{N}(0,1)$ dreififallið $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, $x \in \mathbb{R}$.
Og að $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (þar sem $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$) þýðir að

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(sem er þéttleiki því $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ gefur $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$).

**Setning:** Ef $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ þá er $\mu + \sigma Z \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$,

***Sönnun:** Þéttleikinn (1) fæst með því að diffra

$$F_{\mu+\sigma Z}(x) = \mathbf{P}\big(\mu + \sigma Z \leqslant x\big) = \mathbf{P}\big(Z \leqslant \tfrac{x-\mu}{\sigma}\big) = \Phi\big(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\big).$$

**Setning:** Ef $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ þá er $\mathbf{E}[X] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$
og $a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ fyrir $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

***Sönnun:** $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mu + \sigma Z] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\mu + \sigma Z] = \sigma^2$
og $a + b(\mu + \sigma Z) = a + b\mu + b\sigma Z \sim \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)\,.$

## $Z^2 \sim \mathrm{Gamma}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$

Munið að þar eð $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ er samfelld þá er

$$\mathbf{P}(Z < -x) = \Phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

og þar eð þéttleikinn er samhverfur um $0$ þá er

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

**Setning:** Ef $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ þá er $Z^2 \sim \mathrm{Gamma}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

**Sönnun:** Tökum $x > 0$. Þá er

$$F_{Z^2}(x) = \mathbf{P}(Z^2 \leqslant x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{x}\,)$$

$$= \mathbf{P}(Z \leqslant \sqrt{x}\,) - \mathbf{P}(Z < -\sqrt{x}\,)$$

$$= \Phi(\sqrt{x}\,) - \Phi(-\sqrt{x}\,) = \Phi\big(x^{\frac{1}{2}}\big) - \Big(1 - \Phi\big(x^{\frac{1}{2}}\big)\Big)$$

Þetta gefur

$$F_{Z^2}(x) \;=\; 2\,\Phi\big(x^{\frac{1}{2}}\big) - 1\,, \quad x > 0.$$

Diffrum þetta (og munum að $\Phi'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},\ y \in \mathbb{R}$)

$$f_{Z^2}(x) \;=\; 2\,\big(\tfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\big)\,\Phi'\big(x^{\frac{1}{2}}\big) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0.$$

Nú er þéttleiki $\mathrm{Gamma}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ svona

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}\,\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\big(\tfrac{1}{2}\,x\big)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x^{-\frac{1}{2}}, \quad x > 0,$$

og vegna þess að bæði $f_{Z^2}$ og $f$ hafa tegrið $1$ hlýtur því að gilda að

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}.$$

Þetta gefur að $f_{Z^2} = f$ þ.e. $Z^2 \sim \mathrm{Gamma}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

**Aths:** Sönnunin gefur aukalega að $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$ .

# Summa óháðra samfelldra stærða – Unf

**Setning:** Ef $X$ og $Y$ ery óháðar og samfelldar gildir

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy, \quad a \in \mathbb{R},$$

og

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy, \quad a \in \mathbb{R}.$$

***Sönnun:** Nú er $\{X+Y \leqslant a\} = \{(X,Y) \in A\}$ þar sem $A := \{(x,y) : x+y \leqslant a\}$. Þetta gefur annað skrefið í

$$F_{X+Y}(a) = \mathbf{P}(X+Y \leqslant a) = \mathbf{P}((X,Y) \in A)$$

$$= \iint_A f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Big( \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) dx \Big) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(X \leqslant a-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy.$$

og hin fást samkvæmt skilgreiningum, nema fjórða skrefið sem fæst samkvæmt reglu úr annars-misseris stærðfræðigreningu, eins og lokaskrefið fyrir neðan:

$$f_{X+Y}(a) = \frac{d \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy}{da} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_X(a-y)}{da} f_Y(y) dy.$$

**Setning:** Ef $X$ og $Y$ eru óháðar og jafnt dreifðar á $[0,1]$ þá gildir

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & \text{ef } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 2-a & \text{ef } 1 < a < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

**Sönnun:** Skiptum um breytu $s = a - y$ í skrefi þrjú:

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy = \int_0^1 f_X(a-y) dy$$

$$= \int_{a-1}^{a} f_X(s) ds = \begin{cases} \int_0^a ds = a & \text{ef } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ \int_{a-1}^1 ds = 2-a & \text{ef } 1 < a < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

## Summa óháðra $\mathrm{Gamma}(s,\lambda)$ og $\mathrm{Gamma}(t,\lambda)$

**Setning:** Ef $X$ og $Y$ eru **óháðar**, $X \sim \mathrm{Gamma}(s,\lambda)$ og $Y \sim \mathrm{Gamma}(t,\lambda)$ þá er $X+Y \sim \mathrm{Gamma}(s+t,\lambda)$.

**Sönnun:** Fyrir $x>0$ og $y>0$ höfum við

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1} \quad \text{og} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}$$

Tökum $a>0$. Þá er

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)dy \qquad \text{(sjá síðustu glæru)}$$

$$\overset{[x=a-y]}{=} \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \int_0^a \lambda e^{-\lambda(a-y)}(\lambda(a-y))^{s-1}\, \lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{s+t}e^{-\lambda a}}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \int_0^a (a-y)^{s-1}y^{t-1}dy$$

$$\overset{[y=au]}{=} \frac{\lambda^{s+t}e^{-\lambda a}}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \int_0^1 (a-au)^{s-1}(au)^{t-1}a\, du \qquad \text{(breytuskipti)}$$

$$= c\,\lambda^{s+t}\, e^{-\lambda a} a^{s+t-1} \qquad \text{þar sem } c = \frac{\int_0^1 (1-u)^{s-1}u^{t-1}du}{\Gamma(s)\Gamma(t)}$$

svo

$$f_{X+Y}(a) = c\,\lambda\, e^{-\lambda a}\,(\lambda a)^{s+t-1}, \quad a>0.$$

Þéttleiki $\mathrm{Gamma}(s+t,\lambda)$ er

$$f(a) = \frac{1}{\Gamma(s+t)}\,\lambda\, e^{-\lambda a}\,(\lambda a)^{s+t-1}, \quad a>0,$$

og vegna þess að bæði $f_{X+Y}$ og $f$ hafa tegrið 1 hlýtur því að gilda að $\frac{1}{\Gamma(s+t)} = c\,.$

Þetta gefur að $f_{X+Y} = f$ þ.e. $X+Y$ er $\mathrm{Gamma}(s+t,\lambda)$.

**Setning:** Ef $Z_1,\ldots,Z_r$ eru óháðar $\mathrm{N}(0,1)$ þá er $Z_1^2+\ldots+Z_r^2 \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{r}{2},\frac{1}{2}\right)$

**Sönnun:** Leiðir af næstsíðustu glæru og þessari.

**Aths:** Samkvæmt þessu er $\chi_r^2$ stærðin $\mathrm{Gamma}\left(\frac{r}{2},\frac{1}{2}\right)$.

## Summa óháðra $\mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ og $\mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$

**Með tilfæringum og þolinmæði fæst eftirfarandi setning á sama hátt.**

**Setning:** **Ef $X$ og $Y$ eru óháðar, $X \sim \mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ og $Y \sim \mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ þá er**

$$X + Y \sim \mathrm{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

***Sönnun:** **Sjá iL-heftið.**

HERMANN ÞÓRISSON

# UM SÖGU OG TÚLKUN LÍKINDA

ALLT er tilviljun háð, eða flest. En jafnvel tilviljunin lýtur lögmálum. Líkindafræðin er sú grein stærðfræðinnar sem fjallar um þessi lögmál á sama hátt og til dæmis rúmfræðin fjallar um lögmál flatarmynda og rúmforma. Það var ekki fyrr en á 20. öld sem vísindin komust almennt á það stig að ekki var lengur stætt á að horfa fram hjá því að „allt sé tilviljun háð“. Samkvæmt annarri megingreina nútímaeðlisfræði, skammtafræðinni, er tilviljunin jafnvel einn af hornsteinum heimsins, uppspretta framvindunnar. Líkindafræðin kemur nú við sögu næstum hvar sem gripið er niður í vísindum og tækni, allt frá eðlisfræði til félagsvísinda, tölvunarfræði til hagfræði, upplýsingatækni til fjármálafræði, gæðastjórnun til málvísinda.

Hér verður stiklað á örfáum meginatriðum úr sögu líkindafræðinnar og túlkun líkindahugtaksins rædd[1].

## *Almætti og örlög*

Frá grárri forneskju hafa menn heillast af tilviljuninni. Dæmi um þetta er víða að finna í trúarbrögðum og bókmenntum. Til gamans læt ég fljóta hér með merkilega klausu úr Heimskringlu (Ólafs sögu helga) eftir Snorra Sturluson (1178–1241):

> Svo segir Þorsteinn fróði að byggð sú lá í Hísing er ýmist hafði fylgt til Noregs eða til Gautlands. Þá mæltu þeir konungarnir sín í milli að þeir skyldu hluta um eign þá og kasta til teningum. Skyldi sá hafa er stærra kastaði. Þá kastaði Svíakonungur sex tvö og mælti að Ólafur konungur þurfti þá eigi að kasta.
>
> Hann segir og hristi teningana í hendi sér: „Enn eru sex tvö á teningunum og er guði drottni mínum enn lítið fyrir að láta það upp horfa“.
>
> Hann kastaði og horfðu upp sex tvö. Þá kastaði Ólafur Svíakonungur og enn tvö sex. Þá kastaði Ólafur Noregskonungur og var sex á öðrum en annar

[1] Þessi grein er að stofni til efni sem tekið var saman árið 2003 fyrir *Verpil*, tímarit Stiguls, félags stærðfræði- og eðlisfræðinema við Háskóla Íslands. Meginheimildin er L. E. Maistrov, *Probability Theory: A Historical Sketch* (London – New York 1974). Frumútgáfan er á rússnesku: *Teoria veroiatnostei* (Moskva – Leningrad 1967).

> hraut í sundur og voru þar á sjö. Eignaðist hann þá byggðina. Eigi höfum vér heyrt getið fleiri tíðinda á þeim fundi. Skildust konungar sáttir.[2]

Hér beitir guð óvenjulegu slembibragði til að vilji hans verði.

Menn hafa kastað beinum, sprett upp dýrvömbum og mynstrað glundroðakenndan stjörnuhimininn til að finna vísbendingar um vilja almættisins eða um óumflýjanleg örlög. Og leikir þar sem tilviljun liggur til grundvallar voru og eru sívinsælir, allt frá skafmiðum yfir í rússneska rúllettu og upp í brids, svo þrjú dæmi úr nútímanum séu tekin.

Forstærðfræðileg líkindahugtök hafa lengi verið notuð til dæmis í fjárhættuspilum og dómsmálum til að reyna að ná einhverjum tökum á tilviljun og óvissu. Frummerking orðanna *líkindi* og *líkur* á íslensku og *likelihood* á ensku gæti verið „það sem *líkist* því að vera *satt*“ samanber jafnframt orðið *sennileiki*. Þetta er einnig frummerking orðanna *verisimilis* í latínu, *Wahrsheinlichkeit* í þýsku og *sannolikhet* á sænsku. *Probability* er af latneskum uppruna og mun vísa til þess að vitni sé trúverðugt (göfugt, ættgöfugt).

Þrátt fyrir að tilviljunin sé alls staðar nærverandi og þótt frumatriði líkindafræði séu sára einföld, þróaðist þessi grein stærðfræðinnar seint miðað við til dæmis rúmfræðina sem Grikkir háþróuðu í fornöld og algebruna sem líka komst vel á legg hjá Aröbum fyrir langalöngu. Ein ástæða gæti verið sú að mikilvæg hagnýtingarsvið eins og tryggingar þyrftu að vera til staðar. Önnur ástæða gæti verið sú að það er erfitt að festa hendur á tilviljuninni, það er erfitt að sjá hana fyrir sér.

## *Upphaf á 17. öld — Pascal og Fermat*

Uppruni líkindafræðinnar er yfirleitt rakinn til ársins 1654 þegar franski stærðfræðingurinn og heimspekingurinn Blaise Pascal (1623–1662) hóf bréfaskipti við landa sinn og kollega Pierre de Fermat[3] (1601–1665). Girolamo Cardano (1501–1576) fjallaði reyndar um jafnar líkur um miðja 16. öld[4], en komst ekki að neinum markverðum niðurstöðum. Galileo Galilei

[2] Sjá lok kafla 94. Hísing er nú borgarhlutinn Hisingen í Gautaborg.

[3] Þann sama Fermat og skrifaði á spássíu að hann hefði fundið fagra sönnun á því að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur $x$, $y$ og $z$ sem uppfylla $x^n + y^n = z^n$ fyrir nokkra heila tölu $n$ sem er stærri en tveir, en að því miður væri spássían of þröng til að sönnunin kæmist þar fyrir. Sönnun Fermats er enn ófundin, en hins vegar rak Andrew Wiles smiðshöggið á hátimbraða nútímasönnun fyrir nokkrum árum.

[4] Bók Cardanos, *Liber de ludo aleae*, mun vera skrifuð um 1565 en kom ekki út fyrr en árið 1663.


Mynd 1. *Pierre de Fermat.*

(1564–1642) notaði einnig jafnar líkur til að skoða teningaköst[5], og rétt reiknaðar líkur fyrir þrjú köst mun vera að finna í þrettándualdarljóðinu *De vetula*.

Bréfaskipti þeirra Pascals og Fermats hófust vegna spurninga um fjárhættuspil sem menn að nafni Antoine Gombaud, Chevalier de Méré og Damien Mitton lögðu fyrir Pascal. Krónuköst, teningaköst og einföld fjárhættuspil hafa sömu þýðingu í líkindafræði og þríhyrningar, hringir, kúlur og kassar hafa í rúmfræði: skilningur á þeim auðveldar rannsókn á flóknari fyrirbærum.

Hér er dæmi um verkefni sem Pascal og Fermat leystu, en það hafði þá velkst fyrir mönnum um aldir. Tveir menn leika eftirfarandi leik. Krónu er kastað og fær annar eitt stig ef framhliðin kemur upp og hinn eitt stig ef bakhliðin kemur upp. Vinnur sá sem fyrr fær $n$ stig þar sem $n$ er einhver fyrirfram tiltekinn fjöldi. Mennirnir urðu að hætta leiknum þegar annan vantaði *eitt* stig til að vinna og hinn vantaði *tvö* stig. Hvernig á að skipta vinningsupphæðinni? Pascal og Fermat komust báðir að þeirri niðurstöðu að

[5] Grein Galileos, *Sopra le Scoperte dei Dadi*, mun vera skrifuð um 1620 en birtist ekki fyrr en árið 1718.


Mynd 2.
*Blaise Pascal.*

sá sem vantar eitt stig ætti að fá ¾ af vinningsupphæðinni (vinningslíkur hans eru ¾ ef leikurinn væri leikinn til enda, vikið verður að þessu aftar í greininni).

Pascal og Fermat virðast hafa verið fyrstir til að ná öruggu taki á því sem er í eðli sínu óöruggt. Hollendingurinn Christiaan Huygens[6] (1629–

[6] Huygens var einnig merkur eðlis- og stjörnufræðingur. Hann fann hringa Satúrnusar og fann upp pendúlklukkuna.


Mynd 3.
*Christiaan Huygens.*

1695) byggði á hugmyndum þeirra. Hann gaf út fyrstu bókina um líkindafræði meðal annars fyrir áeggjan Pascals. Hún heitir *De Ratiociniis in Ludo Aleae* og kom út á latínu árið 1657; á hollensku heitir hún *Van reeckeningh in spelen van geluck*.

## *Lögmál mikils fjölda — Jacob Bernoulli*

Jacob Bernoulli (1654–1705), svissneskur stærðfræðingur af niðurlenskum uppruna, sannaði fyrstu meginsetningu líkindafræðinnar, *Lögmál mikils fjölda*. Setninguna er að finna í bókinni *Ars Conjectandi* sem kom út að honum látnum árið 1713. *Lögmál mikils fjölda* má orða svona: Látum $p$ vera líkurnar á því að tiltekinn atburður $A$ gerist í einni tilraun og látum $N_n$ tákna fjölda skipta sem $A$ gerist þegar tilraunin er framkvæmd í $n$ óháð skipti. Þá gildir, þegar $n$ er nógu stórt, að $N_n/n$ er nálægt $p$ með líkum sem eru næstum einn (næstum 100%). Á nútímatáknmáli er þetta skrifað svona (þar sem P táknar líkindi): Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir

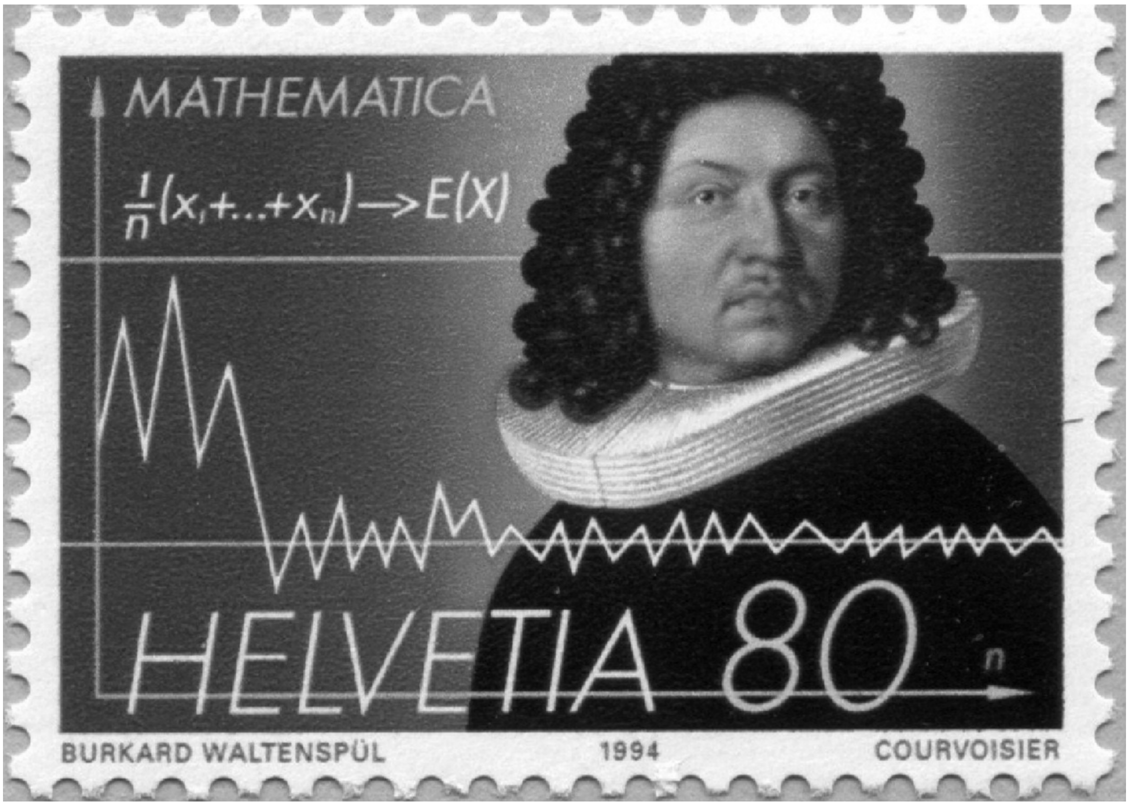
$$\mathrm{P}(|N_n/n - p| \leq \varepsilon) \to 1 \text{ þegar } n \to \infty.$$

Þetta kallast nú *veika* lögmálið til aðgreiningar frá *sterka* lögmálinu sem Emile Borel sannaði tveimur öldum síðar:

$$\mathrm{P}(N_n/n \to p \text{ þegar } n \to \infty) = 1.$$

Losaralegar má skrifa þessi lögmál svona:

$$N_n/n \approx p \quad \text{þegar } n \text{ er nógu stórt.}$$




Mynd 4. *Jacob Bernoulli.*

Þetta samræmist vel þeirri almennu tilfinningu (nútímafólks) að þegar krónu sé kastað oft komi framhliðin upp í um það bil helmingi kasta, og þegar teningi sé kastað oft komi fyrirfram tiltekin hlið upp í um það bil einu af hverjum sex köstum.

*Lögmál mikils fjölda* gildir einnig fyrir meðaltöl af óháðum stærðum sem allar hafa sömu dreifingu (hafa sömu líkur á að taka hin mismunandi gildi) með væntigildi[7] $\mu$:

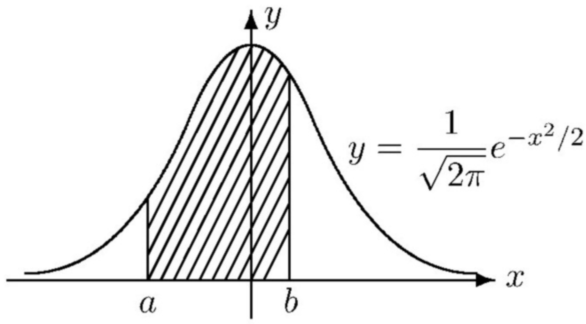
$$(X_1 + \ldots + X_n)/n \approx \mu \quad \text{þegar } n \text{ er nógu stórt.}$$

Lögmálið gildir loks fyrir mjög almenn meðaltöl af óháðum stærðum sem ekki þurfa að hafa sömu dreifingu og af margskonar háðum stærðum líka. Kemur þá einhver annar markgildisfasti í staðinn fyrir sameiginlega væntigildið $\mu$.

[7] Ef slembin stærð $X$ (til dæmis punktafjöldi í teningskasti) getur tekið gildin $a_1, \ldots, a_k$ með líkunum $p_1, \ldots, p_k$ þá er væntigildi $X$ skilgreint sem vegna meðaltalið $\mu = p_1a_1 + \ldots + p_ka_k$. Væntigildið er líka oft táknað með E[$X$].

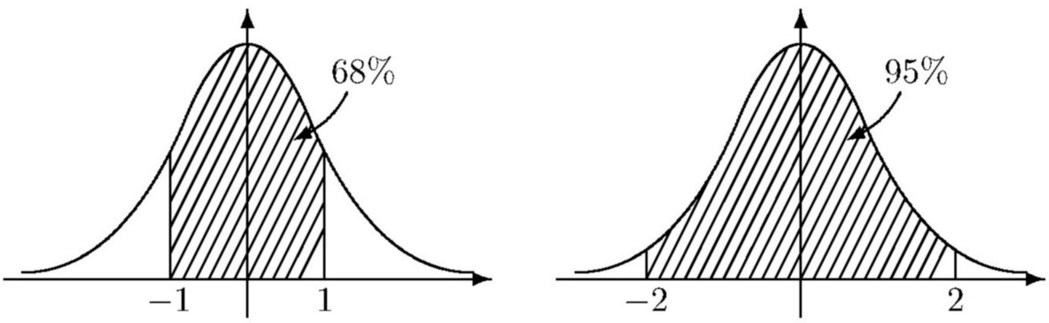
## *Höfuðmarkgildissetningin — de Moivre og Gauss*

Næstu stóruppgötvun gerði Abraham de Moivre (1667–1754), franskur stærðfræðingur sem flúði til Englands undan Húgenottaofsóknunum. Í bók sinni *The Doctrine of Chances*, sem kom út árið 1711 á latínu og 1718 á ensku, setur hann fram *normlegu dreifinguna* og sannar *Höfuðmarkgildissetninguna* fyrir krónuköst: Þegar $p = ½$ og $n$ er nógu stórt þá gildir fyrir öll bil $[a, b]$ að líkurnar á því að $(N_n/n - ½)2\sqrt{n}$ sé innan bilsins eru um það bil flatarmál skástrikaða svæðisins á myndinni:



Mynd 5. *Normlega dreifingin.*

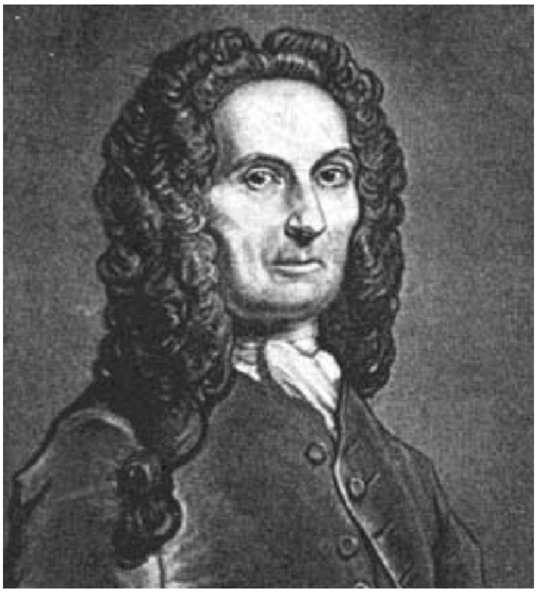
Samkvæmt *Lögmáli mikils fjölda* er hlutfallstíðni framhliða í mörgum krónuköstum nálægt ½ en *Höfuðmarkgildissetningin* fer skrefi lengra og segir hversu góð þessi nálgun er. Þegar krónu er til dæmis kastað 100 sinnum þá eru um það bil 68% líkur á að framhliðin komi upp 50±5 sinnum og um það bil 95% líkur á að hún komi upp 50±10 sinnum:



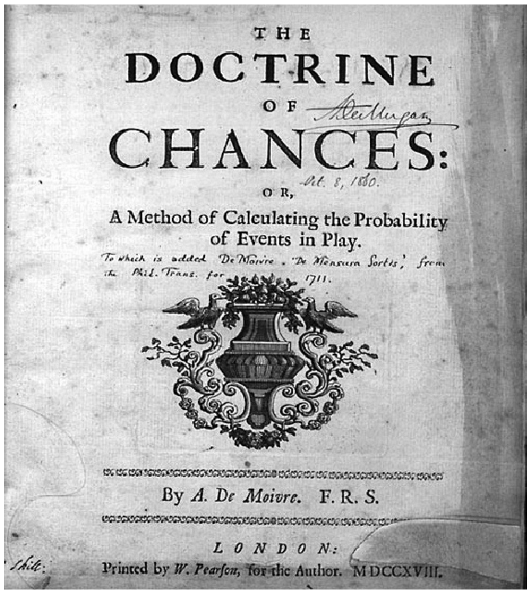
Mynd 6. *Dæmi um líkur á tveimur mismunandi frávikum.*

Þegar krónu er hins vegar kastað 10000 sinnum þá eru um það bil 68% líkur á að framhliðin komi upp 5000±50 sinnum og um það bil 95% líkur á að hún komi upp 5000±100 sinnum. *Hundraðföldun* kasta *hundraðfaldar* væntanlegan fjölda framhliða en óvissubilið hundraðfaldast ekki *heldur tífaldst bara*, — spáin um fjölda framhliða verður *nákvæmari*.

De Moivre sannaði *Höfuðmarkgildissetninguna* fyrir $p = ½$ en almennt gildir að nálga má $(N_n/n - p)\sqrt{(n/p(1 - p))}$ á sama hátt. Og reyndar gildir



Mynd 7. *Abraham de Moivre.*




Mynd 8. *Titilblað*
The Doctrine of Chances.

setningin fyrir mjög almennar summur af óháðum stærðum og fyrir margskonar háðar stærðir líka.

Þótt de Moivre virðist hafa verið fyrstur til að uppgötva normlegu dreifinguna er hún samt yfirleitt ekki kennd við hann heldur oft kölluð


Mynd 9. *Johann Carl Friedrich Gauß.*

*Gaußdreifing* eftir Þjóðverjanum Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), — *Princeps mathematicorum*, — en hann færði rök fyrir því löngu seinna að hún ætti vel við um mæliskekkjur. Þetta stafar af því að mæliskekkjur verða oft til við það að margar smáar næstum óháðar skekkjur leggjast saman.

Rannsóknir á því hvort *Lögmál mikils fjölda* og *Höfuðmarkgildissetningin* — og reglur þeim skyldar — gildi við nýjar áður ókannaðar aðstæður eru sígild viðfangsefni líkindafræðinga. Bæði þessi lögmál gegna lykilhlutverki í nútímatölfræði.

## *Tölfræði — listin að draga ályktanir af gögnum*

Tölfræði er oft kölluð *listin að draga ályktanir af gögnum*. Hún byggir á líkindafræðinni, en er um margt ólík henni og á sér nokkuð aðra sögu.

Erlenda heitið á tölfræði, statistík (statistics á ensku), er dregið af orðinu „stat“ (skandinavíska) eða „state“ (enska) sem táknar ríki. Orðið var notað þegar á 18. öld um tölulegar upplýsingar sem vörðuðu ríkið og hag þess. Samkvæmt þessu er orðið „hagtölur“ ljómandi þýðing á statistík, en orðið „tölfræði“ afleit. „Statistík“ er reyndar núorðið notað um hvers konar gögn, ekki bara gögn sem lýsa hag ríkisins. Þessi tvöfalda merking erlenda orðsins statistík („gögn“ annars vegar og „ályktanafræði“ hins vegar) stingur neyðarlega upp kollinum hér á landi þar sem töluleg gögn eru einatt kölluð „tölfræði“ þótt ekki sé um nein „fræði“ að ræða.

Vísindagreinin tölfræði gerðist stærðfræðilegri með tímanum og tók loks líkindafræðina alfarið í þjónustu sína á 20. öld. Hún þróaðist úr því að fjalla um söfnun og framsetningu gagna yfir í að verða grein á mörkum stærðfræði og annarra vísindagreina sem fjallar um hvernig eigi að draga ályktanir af gögnum og reyndar einnig um hvernig eigi að safna gögnum svo unnt sé að draga af þeim ályktanir.

Tölfræðin er nokkurs konar andhverfa líkindafræðinnar. Líkindafræðin **spáir** fyrir um óþekktar tilraunaniðurstöður á grundvelli þekktra aðstæðna. Tölfræðin snýr þessu við, **metur** óþekktar aðstæður á grundvelli þekktra tilraunaniðurstaðna (gagna). Þetta kemur nokkuð skýrt fram í eftirfarandi dæmi.

Hugsum okkur að gerð sé skoðanakönnun þar sem 1000 handahófsvaldir kjósendur eru spurðir hvort þeir ætli að kjósa tiltekinn flokk eða ekki. Hugsum okkur jafnframt til einföldunar að það sé ekkert brottfall (að allir þúsund svari spurningunni). Látum $p$ tákna raunverulegt hlutfallsfylgi flokksins meðal kjósenda og $H = N_{1000}/1000$ tákna hlutfallsfylgi hans meðal þeirra sem spurðir eru. Þá er $p$ óþekktur fasti en $H$ er ekki fasti heldur slembin stærð: gildið á $H$ fer eftir því hverjir slæðast til að lenda í úrtakinu. Ef samskonar könnun væri gerð samtímis fengist annað $H$ en $p$ væri óbreytt. Með *Lögmáli mikils fjölda* **spáir** líkindafræðin fyrir um $H$ á grundvelli fylgisins $p$ svona: $H \approx p$. Tölfræðin snýr þessu við og **metur** óþekkta fylgið $p$ á grundvelli $H$ svona: $p \approx H$. Ennfremur segir líkindafræðin með *Höfuðmarkgildissetningunni* til um nákvæmni **spárinnar**, til dæmis:

$$H = p \pm 2\sqrt{(p(1-p)/1000)} \text{ með um það bil 95\% líkum.}$$

Tölfræðin snýr þessu líka við og segir til um nákvæmi **matsins**:

$$p = H \pm 2\sqrt{(H(1-H)/1000)} \text{ með um það bil 95\% líkum}$$

þar sem sett hefur verið inn $p(1-p) \approx H(1-H)$ með leyfi *Lögmáls mikils fjölda*.[8]

## *Grundvöllur á 20. öld — Hilbert og Kolmogorov*

Mynd 10. *David Hilbert.*

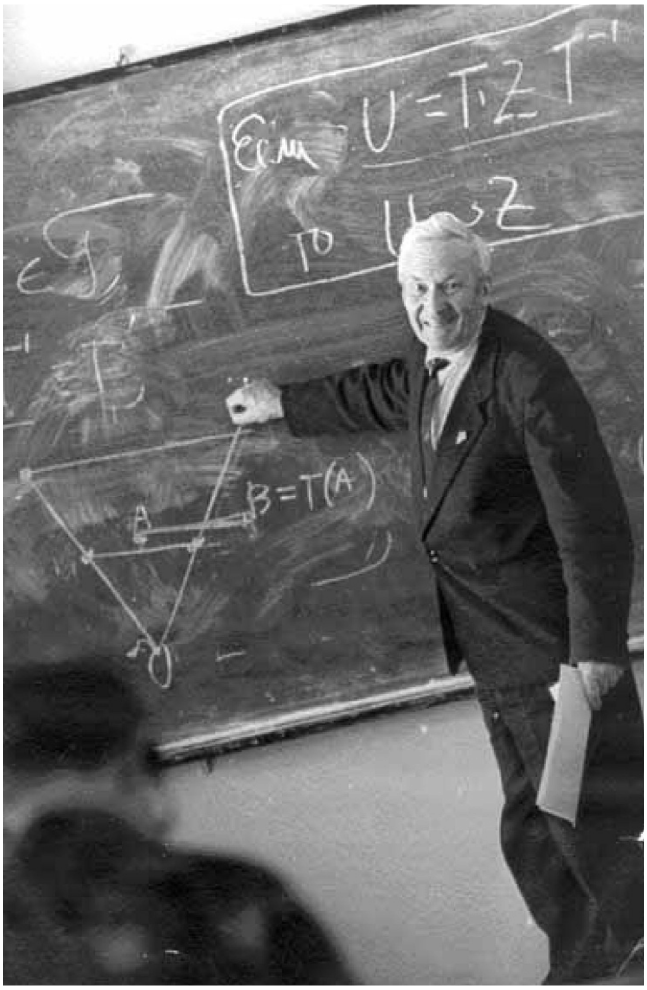
Líkindafræðin þróaðist jafnt og þétt á 18. og 19. öld fyrir tilverknað margra stærðfræðinga (Lagrange, Laplace, Poisson, Chebyshev, Markov) og notkun hennar teygði sig frá tryggingafræði yfir í eðlisfræði, til dæmis beittu Boltzmann og Gibbs henni í lok 19. aldar til að skýra eiginleika eins og hitastig lofttegunda með misæstri slembihreyfingu mikils aragrúa einda.

Líkindafræðin átti þó í vaxandi mæli við þann vanda að stríða að skorta formlegan grundvöll. Þegar endanlega margar útkomur koma til greina (eða teljanlega óendanlega margar eins og þegar krónu er kastað

[8] Sú tölfræði sem greint er frá hér er kennd við hlutlæga tíðnitúlkun líkinda. Tölfræði sem byggir á huglægri túlkun líkinda (Bayesian Statistics) hikar ekki við að gefa óþekkta fylginu $p$ einhverja þekkta líkindadreifingu (kölluð fordreifing). Skekkjumörkin í matinu verða þá önnur og fara eftir þessari fordreifingu. Vikið verður að þessum tveimur túlkunum aftar í greininni.

þar til framhliðin kemur upp) er reyndar allt í sómanum. En til dæmis normlega dreifingin er samfelld, útkomurnar eru ekki bara óendanlega margar heldur óteljandi. Og furðuleg slembikennd náttúrufyrirbæri eins og Brownhreyfing (handahófskennt flökt agnar í vökva eða lofti vegna stöðugra árekstra við ósýnilegar sameindir á ferð og flugi) áttu sér ekki stærðfræðilega lýsingu.

Árið 1900, í frægu erindi á Öðru heimsþingi stærðfræðinga, setti þýski stærðfræðingurinn David Hilbert (1862–1943) fram 23 verkefni fyrir 20. öldina. Sjötta verkefnið fjallar um nauðsyn þess að setja fram frumsendur (axiom) fyrir þau eðlisvísindi þar sem stærðfræði skiptir meginmáli. Hilbert setur þarna líkindafræðina (sem hann greinilega flokkar þá til eðlisvísinda) fremst. Aldarþriðjungi síðar leysti rússneski stærðfræðingurinn Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) þetta verkefni í hnitmiðaðri grein *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* sem kom út árið 1933.




Mynd 11. *Andrei N. Kolmogorov.*

## *„Líkindi eru mál með massann einn"*

Skilgreiningu Kolmogorovs má orða svona:

Þegar tilraun er gerð (til dæmis teningi kastað) táknum við mengi allra hugsanlegra útkoma með $\Omega$ (þegar teningi er kastað getum við sett $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). *Atburður* er einfaldlega hlutmengi í $\Omega$ (þegar teningi er kastað er atburðurinn að oddatala komi upp hlutmengið $\{1, 3, 5\}$). Ekki þurfa öll hlutmengi að vera atburðir, en safn atburða þarf að mynda *σ-algebru*, það er að segja eftirfarandi skilyrði þurfa að vera uppfyllt:

- $\Omega$ er atburður (öruggi atburðurinn).
- Ef $A$ er atburður þá er fyllimengið $\Omega \setminus A$ líka atburður.
- Ef $A_1, A_2, \ldots$ eru atburðir þá er sammengi þeirra atburður.

*Líkindi* eru raungilt fall P skilgreint á safn allra atburða sem uppfyllir eftirfarandi þrjú skilyrði:

(1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
(2) $\mathrm{P}(A) \geq 0$ fyrir alla atburði $A$.
(3) Ef atburður $A$ er sammengi sundurlægra atburða $A_1, A_2, \ldots$ þá gildir að $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots$

Kolmogorov skilgreindi sem sé líkindafræðina sem þann hluta svokallaðrar mál- og tegurfræði sem fjallar um „mál með massann einn“. Frumsendur (2) og (3) þýða að P sé *mál* og frumsenda (1) segir að heildarmálið (heildarmassinn) sé einn.

## *Túlkun til trafala*

Sú grein stærðfræðinnar sem kallast mál- og tegurfræði hafði verið í glæsilegri þróun áratugina á undan og margir höfðu meðhöndlað líkindi sem mál, meðal annars sjálfur frumkvöðull mál- og tegurfræðinnar franski stærðfræðingurinn Emile Borel (1871–1956) sem sannaði til dæmis sterku útgáfuna af *Lögmáli mikils fjölda*. Hvers vegna var þá þessi augljósa skilgreining (að líkindi séu mál með massann einn) svona lengi að koma fram?

Mynd 12. *Emile Borel.*

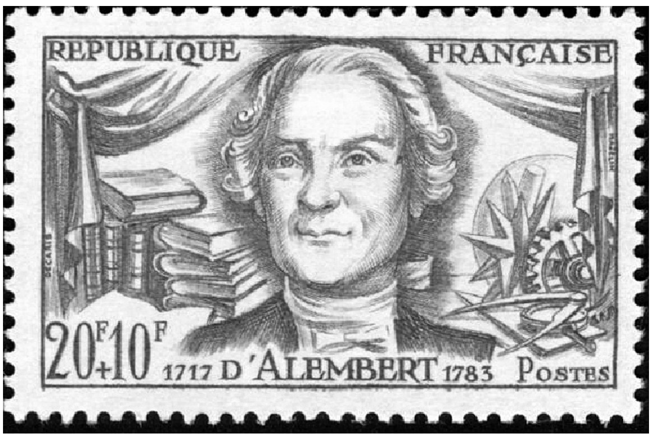
Sá sem þetta skrifar telur að ástæðan sé sú að *túlkun* líkindahugtaksins hafi flækst fyrir mönnum og tafið fyrir. Hann hefur sjálfur reynt það á eigin skinni að þegar byrjendur sjá skilgreiningu Kolmogorovs í fyrsta sinn getur þeim brugðið illilega í brún. Þeir halda ef til vill að hún muni opinbera mikinn stórasannleik um veruleikann, að hún muni svipta hulunni af því hvað líkindi eru í „raun og veru“. En í staðinn koma þessi innantómu orð: líkindi eru mál með massann einn! Það kemur svo smátt og smátt í ljós að þessi „innantómu orð“ hafa í för með sér mikið frelsi. Kolmogorov leysti líkindafræðina úr læðingi með því að losa hana við veruleikatúlkun og gera hana að hreinni stærðfræði. Þeir sem fást við líkindafræði hafa reyndar ósjaldan einhverja veruleikatúlkun að leiðarljósi, en túlkunin flækist ekki lengur fyrir stærðfræðinni sem byggir einfaldlega á frumsendunum þremur.

Skilgreining Kolmogorovs horfði framhjá því hvað líkindi „þýddu“ og losaði okkur þar með við mikið af fimbulfambi. Menn gátu loksins fengist við líkindafræði sem hverja aðra hreina stærðfræði án ágreinings, og deilt svo í tómstundum (eða þegar kom að hagnýtingum) um hvað þetta „þýddi“ allt saman. Við skulum nú leyfa okkur þann lúxus.

## *Bábiljan um jafnar líkur*

Þeir Pascal og Fermat notuðu jafnar líkur þegar þeir settu líkindafræðina á flot á 17. öld. Stundum eru gildar ástæður (samhverfuástæður) til að ætla að líkur séu jafnar, til dæmis að líkur á framhlið þegar krónu er kastað séu ½ og að líkur á tiltekinni hlið þegar teningi er kastað séu ⅙. Hér er samt auðvelt að misstíga sig eins og eftirfarandi saga sýnir.

Stærðfræðingurinn D’Alembert (1717–1783) tók þátt í gerð hinnar merku frönsku alfræðibókar á 18. öld. Hann tekur samskonar dæmi um líkindi og þeir Pascal og Fermat fengust við og nefnt var hér að framan. Tveir menn leika eftirfarandi leik. Krónu er kastað og fær annar eitt stig ef framhliðin kemur upp og hinn eitt stig ef bakhliðin kemur upp. Vinnur sá sem fyrr fær $n$ stig þar sem $n$ er einhver fyrirfram tiltekinn fjöldi. Mennirnir urðu að hætta leiknum þegar annan vantar *eitt* stig til að vinna og hinn *tvö* stig. Hverjar eru líkurnar á að sá, sem vantar eitt stig, vinni ef leikurinn væri leikinn til enda? Samkvæmt D’Alembert koma þrjár útkomur til greina við svona aðstæður:



Mynd 13. *D’Alembert.*

- framhlið í næsta kasti,
- bakhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta.

Tvær útkomur af þessum þremur þýði að sá sem vantar eitt stig vinni og vinningslíkur hans séu því ⅔.

Pascal og Fermat höfðu hins vegar löngu áður gert, — eins og viðtekið er nú á dögum, — ráð fyrir fjórum jafnlíklegum útkomum við svona aðstæður:

- framhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- framhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta.

Þrjár útkomur af þessum fjórum þýði að sá sem vantar eitt stig vinni og vinningslíkur hans séu því ¾.

Rök D'Alemberts fyrir sínum reikningum voru þau að leikurinn sé búinn ef framhliðin kemur upp í næsta kasti. Krónunni sé þá ekki kastað aftur og því rangt að skipta útkomunni „framhlið í næsta kasti" í tvennt („framhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta" og „framhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta"). D'Alembert mun þó hafa viðurkennt að hin lausnin kæmi líka til greina og á jafnframt að hafa sagt að þetta sýndi bara að líkindafræðin sé engin stærðfræði.

Mig grunar að D'Alembert hafi verið haldinn þeirri bábilju (sem reyndar er enn að finna í sumum framhaldsskólakennslubókum) að líkur þurfi alltaf að vera jafnar. Líkönin tvö hér að ofan eru í fullu samræmi innbyrðis ef við notum *ójafnar* líkur í líkani D'Alemberts og gefum útkomunni „framhlið í næsta kasti" líkurnar ½.

En þótt það virðist nokkuð einfeldningslegt hjá D'Alembert að gefa sér jafnar líkur í fyrra líkaninu þá má finna honum það til málsbóta að bæði líkönin koma til greina ef eingöngu er litið á málið frá sjónarhóli *formlegrar* stærðfræði. Þótt stærðfræðilegt *innsæi* kalli reyndar á seinna líkanið, þá er vandamálið einmitt það að líkindafræðin er stærðfræði. Það er *veruleikatúlkunin* en ekki formlega stærðfræðin sem sker úr um hvort líkanið á betur við um raunveruleg krónuköst.

## *Túlkun — Eru líkindi til?*

Túlkanir á líkindum skiptast í meginatriðum í tvennt: huglæga túlkun eða þekkingarhyggju, og hlutlæga túlkun eða raunhyggju.

Þekkingarhyggju, huglægu túlkunina á líkindum, er að finna hjá Pierre-Simon Laplace[9] (1749–1827). Hann reit mikið verk um líkindi, *Théorie*

[9] Þeim sama Laplace og sagði við Napóleon að hann hefði enga þörf fyrir tilgátuna um guð.

*analytique des probabilités*, sem kom út árið 1812. Bókin hefst á 106 síðna formála með heitinu *Essai philosophique sur les probabilités* þar sem hann ræddi túlkun á líkindum. Hann taldi að líkindi kæmu til sögunnar þegar upplýsingar skorti, til dæmis þegar tveir möguleikar eru fyrir hendi og ekkert um þá vitað þá séu þeir jafn líklegir. Þetta er skylt þeirri huglægu túlkun á líkindum, sem kennd er við Thomas Bayes (1702–1761), að líkindi séu mælikvarði á *tiltrú*. Ákveðna gerð þekkingarhyggju er líka að finna hjá hagfræðingnum John Maynard Keynes (1883–1946) í *Treatise on Probability* sem kom út árið 1921. Bruno de Finetti (1906–1985) reyndi að leggja tiltrúartúlkunina til grundvallar líkindafræðinni á 4. áratugnum. Hann og sporgöngumenn hans eru meðal hörðustu áhangenda tiltrúarviðhorfsins og telja að „líkindi séu ekki til“.


Mynd 14.
*Pierre-Simon Laplace.*

Raunhyggjan, hlutlæga túlkunin á líkindum, telur hins vegar að „líkindi séu til“, að tilviljunin sé raunveruleg og að líkindi vísi til einhvers sem sé til staðar í raunveruleikanum utan við huga mannsins. *Tíðnihyggja* er algengasta gerð raunhyggjunnar. Samkvæmt tíðnihyggju eru líkindi hlutfallstíðni þegar tilraun er endurtekin oft. Þetta er í samræmi við *Lögmál mikils fjölda* sem segir að $p \approx N_n/n$ þegar $n$ er stórt. Richard von Mises (1883–1953) reyndi að leggja tíðnitúlkunina til grundvallar líkindafræðinni í *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* sem kom út árið 1919. Í lauslegri endursögn er hugmyndin þessi: Óendanleg talnaruna (ímyndaðar niðurstöður úr endurteknum tilraunum) er lögð til grundvallar og líkur á tilteknum atburði $A$ eru skilgreindar sem

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} N_n(A)/n$$

þar sem $N_n(A)$ táknar fjölda skipta sem atburðurinn $A$ gerist í fyrstu $n$ tilraununum. Þetta markgildi er sem sé sagt vera til áður en líkindi eru skilgreind. Þessi eðlilega tilraun til skilgreiningar mistókst.[10] Takið til dæmis

[10] Hugmyndir von Mises þróuðust út í svokallaða flækjufræði. Hún fjallar um hvað það þýði að ein tiltekin talnaruna sé „slembin í sér“ (en ekki slembin vegna þess hvernig hún verður til, eins og til dæmis við endurtekin teningaköst). Kolmogorov sökkti sér síðar á ævinni niður í rannsóknir á þessu gjörólíka slembihugtaki.

eftir að ef hlutfallstíðni í fyrirframgefinni talnarunu væri notuð sem skilgreining á líkindum kæmu aðeins teljanlega margar útkomur til greina og þar með væru samfelldar dreifingar eins og normlega dreifingin útilokaðar.

Tiltrúarsinnar hafa það meðal annars út á tíðnihyggjuna að setja að hún krefst óendanlegra endurtekninga á tilraun, sem sé óframkvæmanlegt. Líkur séu reyndar oft notaðar við aðstæður þar sem jafnvel ein endurtekning kemur ekki til greina. Tíðnimenn gagnrýna tiltrúarhyggjuna meðal annars með því að benda á að þegar fólk sé beðið um að tiltaka líkur á mörgum atburðum þá sé eins víst að líkurnar séu ekki í innra samræmi (uppfylli ekki frumsendur Kolmogorovs).

## *Hvor túlkunin ætli sé rétt?*

Kolmogorov lagði grunn að líkindafræðinni á allt annan hátt. Hann lagði ekki tiltekna *túlkun* á líkindum til grundvallar heldur aðeins stærðfræðilega *eiginleika* þeirra. Einn af kostunum við skilgreiningu Kolmogorovs er sá að hún á jafn vel við um báðar túlkanir: þá huglægu og þá hlutlægu. En hvor túlkunin skyldi vera „rétt“?

Sá sem þetta skrifar telur að túlka megi líkindi á báða vegu. Ekkert mæli gegn því að nota líkindi sem mælikvarða á tiltrú, en jafnframt sé ókleift að skýra hversu nothæf líkindafræðin er ef hún fjalli ekki um eitthvað raunverulegt utan huga mannsins. Í D'Alembert sögunni hér að framan samræmist aðferð Pascals og Fermats bæði samhverfurökum tiltrúarmanna og niðurstöðum tíðnitilrauna. Ef til vill mætti nota það sem mælikvarða á „veruleikatengsl“ manneskju hversu vel persónuleg tiltrú samræmist mældri tíðni.

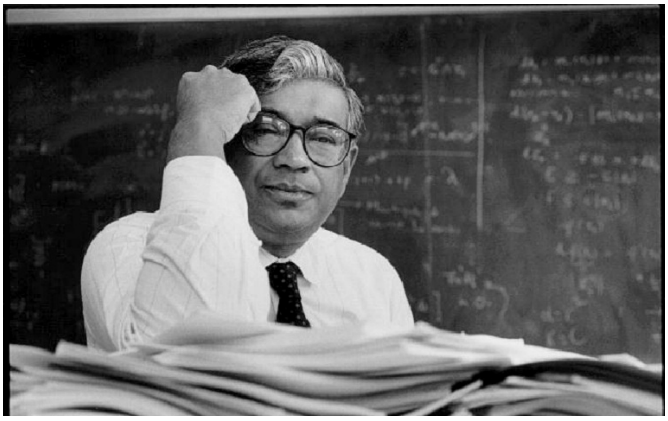
Eitt það merkilegasta við skilgreiningu Kolmogorovs er að hún leiðir af sér *Lögmál mikils fjölda*: **líkindi** eru markgildi hlutfallslegrar tíðni við óháðar endurtekningar á sömu tilraun. En þetta markgildi er aðeins til með **líkunum** einn. Þannig þarf hér hugtakið „líkindi“ að vera skilgreint *áður en* hægt er að setja fram tíðnitúlkunina á líkindum. Stærðfræðileg líkindi hafa sem sagt í för með sér tíðnitúlkunina á sjálfum sér! Samkvæmt þessu gætu stærðfræðileg líkindi endurspeglað eitthvert torkennilegt veruleikafyrirbæri sem birtist sem stöðugleiki hlutfallstíðni.

Þennan stöðugleika er glettilega víða að finna í náttúrinni. Sama gildir um normlegu dreifinguna sem *Höfuðmarkgildissetningin* spáir fyrir um, Poissondreifinguna (sem á við um fjölda skipta sem ólíklegur atburður gerist í endurteknum óháðum tilraunum, eins og þegar frumeindir í geislavirku efni klofna) og margvíslegar aðrar dreifingar sem líkindafræðin spáir fyrir um með setningum sínum.

## *Nútímalíkindafræði*

Á þeim tæpu átta áratugum sem liðnir eru frá því Kolmogorov setti fram sitt fallega líkan (skilgreiningu) hefur ekkert lát verið á nýjum viðfangsefnum og hugmyndum.

*Mikil frávik* fjalla til dæmis um hvað gerist þegar atburðarás víkur mikið frá sínum meðalfarvegi. Sænski stærðfræðingurinn Harald Cramér (1893–1985) leiddi út fyrstu niðurstöðurnar á þessu sviði fyrir summur $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ af óháðum stærðum sem allar hafa sömu dreifingu með væntigildi $\mu$. Þegar fjöldinn $n$ vex segir *Höfuðmarkgildissetningin* að líkurnar $P(S_n/n > \mu)$ nálgist ½ en að líkurnar $P(S_n/n > q)$ minnki niður í núll ef $q > \mu$. Í tryggingastærðfræði (sem var ein af vöggustofum líkindafræðinnar og er mikilvægt hagnýtingarsvið hennar) gætu þessar stærðir verið mánaðarlegar bótakröfur, $n$ tiltekinn mánaðafjöldi, og spurningin sú hversu miklu hærri en $\mu$ mánaðariðgjöldin $q$ þurfi að vera til að líkurnar á tapi séu viðunandi litlar. Árið 2007 voru Abelsverðlaunin[11] veitt indverska líkindafræðingnum Srinivasa Varadhan fyrir grundvallandi rannsóknir á þessu sviði.



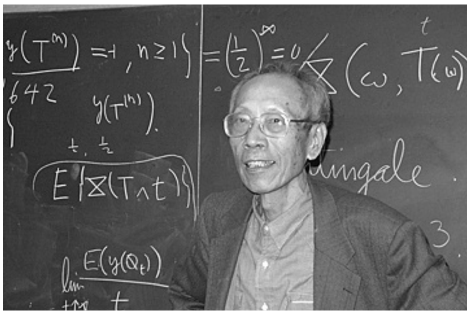
Mynd 15. *Srinivasa Varadhan.*

*Slembiferli* eru viðamikið svið líkindafræði. Slembiferli lýsa tilviljunarkenndri þróun í tíma. Eiginleikar þeirra geta verið margvíslegir. Sum slembiferli leita í jafnvægi með tímanum, en til dæmis hefur Brownhreyf-

[11] Abelsverðlaunin eru kennd við norska stærðfræðinginn Niels Henrik Abel (1802–1829). Norðmenn stofnuðu til þeirra í tilefni af tveggja alda fæðingarafmæli hans og hafa veitt þau árlega frá árinu 2003. Til stóð að koma þeim á fót í aldarminningu Abels en aðskilnaðar Noregs og Svíþjóðar árið 1905 kom í veg fyrir það. Abelsverðlaunin í stærðfræði mótsvara Nóbelsverðlaununum í eðlisfræði. Áður hafði Fieldsorðan gegnt þessu hlutverki. Fieldsorðan var fyrst veitt árið 1936 og síðan á fjögurra ára fresti frá árinu 1950. Sá sem hana fær má ekki vera orðinn fertugur.

Mynd 16. *Wendelin Werner.*

ing (líkan meðal annars fyrir hreint slembiflakk agnar eða flökt á verðbréfamarkaði) í einni og tveimur víddum þann eiginleika að hún leitar alltaf til upphafs síns en leitar samt ekki í jafnvægi heldur þynnast endurkomurnar út með tímanum. Í þremur víddum (og þar fyrir ofan) hverfur Brownhreyfing á endanum á braut og kemur aldrei aftur að upphafi sínu. Brownhreyfing hefur ógrynnin öll af merkilegum eiginleikum, til dæmis er hún samfelld sem fall af tíma en samt hvergi diffranleg. Árið 2006 var fransk-þýski líkindafræðingurinn Wendelin Werner sæmdur Fieldsorðunni[12] fyrir rannsóknir á flatarfræðilegum eiginleikum Brownhreyfingar í tveimur víddum.



Mynd 17. *Kai Lai Chung.*

Brownhreyfing er grundvallarverkfæri þeirrar fjármálastærðfræði sem tútnað hefur út síðustu tvo áratugina. Höfundi er enn í fersku minni fyrirlestur sem Kai Lai Chung (1917–2009) prófessor við Stanfordháskóla hélt fyrir aldarfjórðungi um Brownhreyfingu. Fyrirlesturinn hélt hann á máða tveggjafermetra krítartöflu þar sem hann kom öllu efninu fagurlega fyrir án þess að þurrka nokkuð út. Þegar fyrirlestrinum lauk snéri hann sér að áheyrendum og sagði eitthvað á þessa leið: „Þeir hérna hinum megin við götuna [þar er Stanford Graduate School of Business] segja að bráðum verði þessi fræði aðal málið á Wall Street. Ég hef enga trú á því. Þau eru alltof djúp og fáguð til að koma að nokkru gagni í þeim hráa heimi." Hann virtist hafa lög að mæla, það væri merkilegt ef svona fræði næðu að lýsa á raunhæfan hátt innmúruðu gróðabralli í yfirheimum auðmanna. Það kom því eins og skrattinn úr sauðarleggnum þegar fjármálastærðfræði byggð á Brownhreyfingu spratt upp eins og gorkúlur í háskólum út um allan heim nokkrum árum síðar.

[12] Sjá neðanmálsgrein 11.

Slembiferli af ýmsu tagi koma við sögu í margskonar líkönum sem lýsa til dæmis myndun litninga eða afgreiðslu/umferð í búð, birgðageymslu, gatnakerfi eða á Internetinu þar sem ótrúlegt magn boða flækist um á glundroðakenndan hátt og geta hlaðist upp og myndað tappa sem mikilvægt er að skilja svo unnt sé að draga úr myndun þeirra. Ferli í margvíðum tíma eða í trjám og gröfum eru nú mikið athuguð en þau koma til dæmis við sögu við úrvinnslu gerfihnattamynda (olíuleit, stríð; staðsetning er „tími“ og gildi ferlisins á tilteknum stað gæti verið hæð eða litur) og leit í tölvum. Þegar veruleikinn verður of flókinn til að hefðbundnir reikningar séu framkvæmanlegir er oft brugðið á það ráð að herma slembilíkön í tölvum og hafa margar snjallar aðferðir verið þróaðar í því skyni. Loks má geta þess að ástæðan fyrir því að leitarvélin Google ber höfuð og herðar yfir keppinauta sína er sú að hún notar slembigang á grafi (Internetinu) til að raða leitarniðurstöðunum í mikilvægisröð.

Ofangreind dæmi eru fátækleg lýsing á viðfangsefnum nútímalíkindafræði. Þau eru nefnd hér til að gefa smá nasasjón af því hvers eðlis slík viðfangsefni geta verið.[13]

## *Lokaorð*

Árið 1997 kom út hjá Springer bók eftir sænska líkindafræðinginn Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, þar sem gerð var tilraun til að fjalla um öll grundvallaratriði nútímalíkindafræði. En ekki hafði þessi yfirþyrmandi bók fyrr litið dagsins ljós en höfundurinn endurritaði hana í ljósi nýrra rannsókna. Nýja útgáfan kom út árið 2001 og er meira en 600 síðna samþjappað stærðfræðiþykkni, en höfundur viðurkennir samt að honum sé um megn að fjalla um öll grundvallaratriði greinarinnar eins og hann hafi þó ætlað sér þegar af stað var lagt.

Um aldamótin 1900–1901 gat einn maður (Hilbert) haft næga yfirsýn yfir alla stærðfræði, og stærðfræðilega eðlisfræði líka, til að setja fram raun-

[13] Í upphafi þessarar greinar segir að samkvæmt skammtafræðinni sé tilviljunin jafnvel einn af hornsteinum heimsins. Svo undarlega vill til að skilgreining Kolmogorovs á líkindum virðist ekki nægja til að lýsa þeim örheimi þar sem þessi heimsgrundvallandi tilviljun býr. Skammtafræðin spáir til dæmis á einfaldan hátt fyrir um fyrirbæri sem Einstein kallaði *draugalega fjarverkun*. Þetta fyrirbæri er nú nokkuð vel staðfest með tilraunum en engin viðunandi skýring á grundvelli skilgreiningar Kolmogorovs liggur enn fyrir. Merkilegt nokk benti Einstein á þetta fyrirbæri um svipað leyti og Kolmogorov setti fram sína skilgreiningu. Sjá til dæmis lokahluta fyrsta kafla í bók höfundar *Coupling, Stationarity, and Regeneration* (Springer, New York 2000), www.hi.is/~hermann/iid/csr/.

hæfan verkefnalista fyrir 20. aldar stærðfræði. Um aldamótin 2000–2001 hefur einn öflugasti maður á sviði hreinnar líkindafræði tæplega yfirsýn yfir grundvallaratriði þessarar sérgreinar stærðfræðinnar, hvað þá yfir öll sérsvið líkindafræðinnar hrein og hagnýt. Þetta er lýsandi dæmi um vöxt vísinda á 20. öld.

Þrátt fyrir þennan öra vöxt er líkindafræðin enn á æskuskeiði og engin ástæða til að láta hugfallast þótt illkleift sé að hafa yfirsýn yfir öll grundvallaratriði hennar. Innsæi — byggt á tilfinningu fyrir einföldum tilraunum eins og krónuköstum — er ekki síður gagnlegt en yfirgripsmikil formleg þekking. Nóg er af verkefnum sem leysa má með traustri þekkingu á nokkrum meginatriðum og góðu innsæi.

## SUMMARY


*On the history and interpretation of probability*

The article briefly outlines the history of probability theory from the early beginnings in the 1650s leading to the fast discovery of the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem, to the modern axiomatization in the 1930s resulting in an explosion of new theoretical and practical developments.

It is suggested that the axiomatic formalization through abstract properties of probability was delayed for years by the confusion about the real-world interpretation of probability. According to the theory derived from the axioms, probabilities are the limits of relative frequencies in independent repetitions of an experiment. Curiously, however, it is the case that this claim is only true with probability one. Thus in this theory, the concept of probability has to be introduced before probability can be interpreted as the limit of relative frequencies.

In the controversy between the subjective and objective interpretations of probability, it is claimed that while it is fully legitimate to quantify personal believes by probabilities it is hard to explain the applicability of probability theory if it does not deal with something real outside the mind of individual persons. This something may be evasive but it manifests itself in the real world for instance through the stability of relative frequencies.

# Blaise Pascal

Hermann Þórisson

Blaise Pascal (1623-1662) var franskur stærðfræðingur, eðlisfræðingur, uppfinningamaður, trúspekingur og ritsnillingur. Hann fæddist í Clermont, sem nú heitir Clermont-Ferrand í Auvergne, þar sem faðir hans var forseti skattdómsins og þekktur áhugamaður um stærðfræði og vísindi. Móðir hans dó þegar hann var þriggja ára og árið 1631 seldi(!) faðir hans stöðu sína og fluttist með Pascal og systur hans tvær til Parísar en hóf síðar störf við skattinn í Rúðuborg.

Faðir Pascals sá um menntun barna sinna sem öll voru mjög hæfileikarík. Hann var þeirrar óvenjulegu skoðunar að stærðfræði krefðist þroska og henti ekki börnum og bannaði þeim að fást við hana. Sonurinn stalst til að fikta við stærðfræði og þegar faðir hans uppgötvaði að hann, tólf ára gamall, hafði upp á eigin spýtur fundið út að hornasumma þríhyrnings er 180 gráður leyfði hann honum að kynna sér Evklíð og fór svo að taka hann með á fundi þar sem margir fremstu stærðfræðingar þess tíma hittust.

Sextán ára skrifaði Pascal sína fyrstu stærðfræðigrein. Þar sannaði hann setningu í varprúmfræði sem enn er kennd við hann. Setningin segir að ef sexhyrningur er innritaður í keilusnið (til dæmis hring) þá liggja skurðpunktar framlenginga mótstæðra hliða á beinni línu. Franski heimspekingurinn og stærðfræðingurinn René Descartes (1596-1650) mun í fyrstu ekki hafa trúað því að þessi grein gæti verið verk svo ungs manns. Átján ára hóf Pascal að þróa reiknivél til að auðvelda föður sínum vinnu við skattheimtuna og næsta áratuginn smíðaði hann tuttugu eintök af þessari vél, sem kallast Pascaline.

Árið 1646, þegar Pascal var 23 ára, hafði hann frétt af tilraun ítalska eðlis- og stærðfræðingsins Evangelistas Torricellis (1608-1647) og framkvæmdi hana sjálfur. Hún er fólgin í því að setja tilraunaglas fyllt kvikasilfri á hvolf í skál með kvikasilfri. Ef botni glassins er lyft upp úr skálinni helst kvikasilfrið allt í glasinu til að byrja með en þegar botninn er kominn í vissa hæð hættir kvikasilfrið að fylgja með og rými myndast fyrir ofan það. Pascal setti fram þá skýringu á þessu að loftþrýstingur haldi kvikasilfrinu uppi, en þegar kvikasilfursúlan væri orðin nógu há dygði loftþrýstingurinn ekki til og því myndaðist tómarúm fyrir ofan súluna. Hann framkvæmdi tilraunir sem sýndu að kvikasilfurssúlan lækkar eftir því sem hærra er farið með svona loftvog. Í tengslum við þessar rannsóknir setti hann fram það meginviðhorf tilraunavísinda sem vísindaheimspekingurinn Karl Popper (1902-1994) hóf til vegs á tuttugustu öld, að til að kanna gildi kenningar dugi ekki að reyna að staðfesta hana heldur þurfi líka að reyna að sýna fram á að hún sé ekki rétt. Ef kenningin standist ekki eina slíka prófraun sé hún röng. Pascal setti einnig fram lögmál um þrýsting í vökvum sem kennt er við hann og liggur meðal annars til grundvallar vökvadælum eins og nú eru notaðar til dæmis í hemla- og stýribúnaði bíla.

Árið 1653 skrifaði Pascal grein um eftirfarandi töflu:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | … |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | | | | |
| 1 | 5 | 15 | | | | | |
| 1 | 6 | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |
| … | | | | | | | |

Taflan er búin til þannig að talan 1 er sett í öll sætin í efstu línu og öll sætin í dálknum lengst til vinstri. Síðan er hver skálínan á fætur annarri fyllt með því að setja í hvert sæti þá tölu sem fæst með því að leggja saman næstu tölu fyrir ofan og næstu tölu til vinstri. Til dæmis fæst 15 hér að ofan með því að leggja saman 5 og 10. Pascal sannaði að tala númer $k + 1$ í skálínu númer $n + 1$ er:

$$\frac{n!k!}{(n-k)!}$$

Þótt taflan sé töluvert eldri en hann þá er hún nú kölluð Pascalþríhyrningurinn. Mikilvægi þessa þríhyrnings stafar af því að fjöldi möguleika á að velja $k$ stök úr mengi með $n$ stökum er tala númer $k + 1$ í skálínu númer $n + 1$. Til dæmis er hægt að velja tvö stök á 15 vegu úr mengi með sex stökum. Þetta kemur sér í lagi að gagni í líkindareikningi. Ef til dæmis tveir menn eru valdir af handahófi úr sex manna hópi þá eru líkurnar 1/15 á að tveir tilteknir vinir í hópnum séu báðir valdir.

Uppruni líkindafræðinnar er yfirleitt rakinn til ársins 1654 þegar Pascal hóf bréfaskipti við landa sinn Pierre de Fermat (1601-1665). Girolamo Cardano (1501-1576) fjallaði reyndar um jafnar líkur um miðja 16. öld, en komst ekki að neinum markverðum niðurstöðum. Galíleó Galílei (1564-1642) notaði einnig jafnar líkur til að skoða teningaköst, og rétt reiknaðar líkur fyrir þrjú köst mun vera að finna í þrettándualdar ljóðinu *De vetula*.

Bréfaskipti þeirra Pascals og Fermats hófust vegna spurninga um fjárhættuspil sem menn að nafni Antoine Gombaud, Chevalier de Méré og Damien Mitton lögðu fyrir Pascal. Krónuköst, teningaköst og einföld fjárhættuspil hafa sömu þýðingu í líkindafræði og þríhyrningar, hringir og keilusnið hafa í rúmfræði: skilningur á þeim auðveldar rannsókn á flóknari fyrirbærum.

Hér er dæmi um verkefni sem Pascal og Fermat leystu, en það hafði þá velkst fyrir mönnum um aldir. Tveir menn leika eftirfarandi leik. Krónu er kastað og fær annar eitt stig ef framhliðin kemur upp og hinn eitt stig ef bakhliðin kemur upp. Vinnur sá sem fyrr fær *n* stig þar sem *n* er einhver fyrirfram tiltekinn fjöldi. Mennirnir urðu að hætta leiknum þegar annan vantaði eitt stig til að vinna og hinn vantaði tvö stig. Hvernig á að skipta vinningsupphæðinni?

Pascal og Fermat komust báðir að þeirri niðurstöðu að sá sem vantar eitt stig ætti að fá 3/4 af vinningsupphæðinni. Útleiðsla Fermats var á þessa leið: Fjórar jafn líklegar útkomur koma til greina við svona aðstæður ef leikurinn væri leikinn til enda,

- framhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- framhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta.

Þrjár útkomur af þessum fjórum þýða að sá sem vantar eitt stig vinni og vinningslíkur hans eru því 3/4 og því á hann að fá 3/4 af vinningsupphæðinni.

Útleiðsla Pascals var hins vegar á þessa leið: Með helmings líkum fær sá sem vantar eitt stig alla vinningsupphæðina eftir næsta kast. Með helmings líkum vantar báða eitt stig eftir næsta kast og þá er væntalegur vinningur hvors um sig hálf upphæðin. Væntalegur vinningur þess sem vantar eitt stig í upphafi er því helmingur af allri upphæðinni og helmingur af hálfri upphæðinni, það er að segja 3/4 af vinningsupphæðinni. Hér kynnir Pascal til sögunnar bæði væntigildi og skilyrðingu, hvort tveggja lykilhugtök í líkindafræði. Það átti ekki fyrir Pascal að liggja að þróa þessa nýju grein stærðfræðinnar frekar. Hollendingurinn Christiaan Huygens (1629-1695) byggði á hugmyndum þeirra Fermats. Hann gaf út fyrstu bókina um líkindafræði árið 1657 meðal annars fyrir áeggjan Pascals.

Svokallað Pascalveðmál er að finna í hugleiðingum sem birtust að Pascal látnum. Samkvæmt því er skynsamlegt að trúa á guð vegna þess að hversu ólíkleg sem tilvist hans sé þá geri sú eilífa sæla, sem fylgi því að trúa á hann, það að verkum að væntanlegur hagnaður sé óendanlegur. Richard Dawkins, höfundur *The God Delusion*, segir að það sé eitthvað einstaklega skrítið við þessa röksemd. Það sé ekki hægt að ákveða að trúa ef maður trúir ekki. Þá sé bara hægt að ákveða að þykjast trúa. Ekki er gott að vita hvað Pascal gekk til með þessu. Dawkins heldur helst að hann hafi verið að grínast, en það rímar illa við það sem hér fer á eftir.

Pascal og yngri systir hans höfðu hrifist af kaþólskum trúarhópi, Jansenistum, árið 1646. Faðir Pascals dó árið 1651 og yngri systir hans gerðist þá nunna. Pascal mun hafa fengið trúaropinberun síðla árs 1654, sama ár og hann skapaði líkindafræðina, og sneri þá baki við veraldarvafstri og gerðist meinlætamaður. Eina stærðfræðin sem hann leyfði sér að stunda eftir þetta voru rannsóknir á hjólferli sem léttu honum tannpínu. Pascal beitti sér nú í trúfræðilegum átökum og reit frægt varnarverk fyrir Jansenismann, *Lettres provinciales*, sem var jafnframt logandi ádeila á Jesúíta. Bæði Voltaire og Rousseau munu hafa orðið fyrir áhrifum af ritsnilld hans.

Eftir Pascal er haft að hjartað eigi sér rök sem rökhugsun nái ekki til og í hjartanu sé guðslaga hólf sem ekkert geti fyllt nema guð.

Pascal var heilsuveill og þjáðist af höfuðverk í æsku og svefnleysi upp úr því. Hann lést árið 1662, aðeins 39 ára. Sagt er að Pascal sé ekki síður frægur fyrir það sem hann hefði getað gert en það sem hann gerði. Leibniz á meðal annars að hafa notið hugmynda frá Pascal þegar hann setti fram örsmæðareikninginn.

# Gottfried Wilhelm Leibniz

Hermann Þórisson

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) var þýskur heimspekingur og stærðfræðingur, og reyndar lögfræðingur, diplómat, sagnfræðingur og uppfinningamaður, svo eitthvað sé nefnt. Hann er þekktastur fyrir að leggja, samhliða Isaac Newton, grunninn að örsmæðareikningnum, einni hagnýtustu grein stærðfræðinnar, og gefa honum hentugan (og himneskan) örsmæðarithátt:

$$dy/dx \text{ fyrir diffrun} \quad \text{og} \quad \int f(x)dx \text{ fyrir tegrun.}$$

En Leibniz lét til sín taka á fjölmörgum öðrum sviðum, eins og tæpt verður á hér á eftir.

Leibniz fæddist í Leipzig í Saxlandi árið 1646, við lok þrjátíu ára stríðsins. Faðir hans var siðfræðiprófessor við Leipzigháskóla, en hann lést þegar Leibniz var sex ára. Talið er að móðir Leibniz hafi innrætt honum þau lífsviðhorf sem mótuðu heimspeki hans. Hann erfði bókasafn föður síns, þar sem var að finna fjölda heimspeki- og guðfræðirita, einkum á latínu. Mun Leibniz hafa sótt í þau og verið orðinn fullfær í latínu um 12 ára aldur fyrir vikið, en hann skrifaði mörg rita sinna á því máli.

Leibniz hóf nám við Leipzigháskóla þegar hann var 14 ára og lauk BA-prófi í heimspeki í desember 1662 og meistaraprófi í febrúar 1664. Meistararitgerðin hans hét *De Principio Individui* og var hún forboði hugmyndarinnar um mónöður (monad) sem komið verður að hér á eftir. Sumarið 1663 hafði Leibniz dvalið við nám í Jena og kynntist þar stærðfræði, en hún var illa kennd í Leipzig. Í september 1665 lauk hann prófi í lögfræði. Árið 1666, tvítugur að aldri, gaf hann út sína fyrstu bók, *Disertatio de arte combinatoria*, en fyrsti hluti hennar var hæfisritgerð hans í heimspeki. Næsta ætlunarverk Leibniz var að taka doktorspróf í lögfræði það sama ár, en að jafnaði tók það þrjú ár. Hann hefur hins vegar þótt of ungur og var meinað að taka prófið. Leibniz fór því frá Leipzig í fússi í september 1666 og skráði sig í Altdorfháskóla við Nürnberg. Þar varði hann doktorsritgerð sína í lögfræði og fékk starfsleyfi nokkrum mánuðum síðar. Leibniz var boðin staða við Altdorfháskólann en þáði hana ekki, hugsanlega vegna þess að fjölfræðingnum hugnaðist ekki deildahólfun háskólanna. Hann starfaði það sem eftir var ævinnar í þjónustu tveggja þýskra aðalsætta.

Árið 1667 varð Leibniz ritari félags alkemista í Nürnberg og kynntist þá baróninum Johann Christian von Boineburg, sem var mikill áhrifamaður í þýskum stjórnmálum á þeim tíma. Þeir urðu vinir og í nóvember 1667 gekk Leibniz í þjónustu Boineburg og settist að í Frankfurt. Næstu árin kom hann að margs konar verkefnum sem snertu vísindi, ritstörf og stjórnmál. Meðal annars vann hann að því að sætta kaþólsku og lútersku, sem var eitt af hugðarefnum hans alla ævi. Leibniz hóf einnig rannsóknir á hreyfingu til að skýra á almennan hátt niðurstöður Christophers Wren og Christiaans Huygens um fjaðrandi árekstra.

Boineburg kynnti Leibniz fyrir kjörfurstanum af Mainz. Leibniz tileinkaði honum lögfræðiritgerð og komst í kjölfarið í náð hjá honum. Þýskumælandi lönd í Evrópu voru illa leikin eftir þrjátíu ára stríðið og margir óttuðust innrás frá Frakklandi. Leibniz lagði til að þessu yrði afstýrt með því að beina athygli Frakka að Egyptalandi, sem myndi opna þeim leið til hollensku Austur-Indía. Kjörfurstinn féllst á þessa tillögu og árið 1672 bauð ríkisstjórn Frakklands Leibniz til Parísar til að ræða málin. Ekkert varð þó úr þessu vegna þess að stríð braust út milli Frakklands og Hollands. Segja má að Napóleon hafi óafvitandi hrint áætlun Leibniz í framkvæmd með mislukkaðri innrás sinni í Egyptaland árið 1798.

En þannig atvikaðist það að Leibniz dvaldist um skeið í París, suðupotti heimspeki og vísinda í aðdraganda upplýsingarinnar. Þar nam hann stærð- og eðlisfræði af Christian Huygens haustið 1672. Meðal annars kynnti hann sér óendanlegar raðir og gerði nokkrar uppgötvanir um þær sjálfur. Boineburg sendi son sinn til Parísar að læra hjá Leibniz, og þar með var fjárhagsleg afkoma Leibniz tryggð. Frændi Boineburgs kom með syninum í þeim erindagjörðum að fá Loðvík 14. til að koma á friðarráðstefnu. Boineburg lést í desember 1672, en Leibniz naut áfram stuðnings ekkju hans fram til 1675.

Í janúar 1673 hélt Leibniz ásamt frændanum til Englands í sams konar erindagjörðum á vegum kjörfurstans af Meinz eftir að friðarferðin til Frakklands hafði mistekist. Þar kynnti Leibniz reiknivél, sem hann var að hanna, í Konunglega vísindafélaginu, en hann bætti margföldun og deilingu við reiknivél Pascals og fann upp svokallað Leibniz-hjól, sem notað var í fyrstu fjöldaframleiddu reiknivélina. Honum var veitt innganga í Konunglega vísindafélagið í apríl það ár. Í þessari ferð ræddi Leibniz við Hooke, Boyle og Pell og komst þá meðal annars að raun um að niðurstöður sem hann hafði leitt út um óendanlegar raðir væru þekktar. Við fráfall kjörfurstans af Mainz þá um vorið hvarf hann aftur til Parísar. Eftir Lundúnaferðina gerði Leibniz sér grein fyrir að hann ætti mikið eftir ólært í stærðfræði. Hann sökkti sér nú niður í hana og breyttist fljótt úr byrjanda í skapandi snilling. Næstu árin þróaði hann örsmæðareikning sinn.

Örsmæðahugmyndir má rekja aftur til Forngrikkja og þær lágu í loftinu á 17. öld. Árið 1674 nefndi Leibniz örsmæðareikning í bréfi til Oldenburgs í Konunglega vísindafélaginu og fékk það svar að Newton og Gregory hefðu þegar fundið almennar aðferðir af því tagi. Upp úr þessu áttu Newton og Leibniz í bréfaskriftum, en í þeim koma aðferðir Newtons aldrei fram. Newton gerði uppgötvanir sínar á árunum 1666-67, en birti þær ekki fyrr en *Principia* kom út árið 1687. Leibniz birti diffurreikning sinn árið 1684 og tegurreikninginn árið 1686. Ekki er unnt að staðfesta með vissu hversu mikið Leibniz vissi um aðferðir Newtons þegar hann þróaði örsmæðareikning sinn. Hins vegar fer það ekki á milli mála að aðferðir hans eru öðruvísi en Newtons og rithátturinn gjörólíkur og miklu hentugri til reikninga.

Örsmæðaritháttur Leibniz leiddi til forskots meginlandsmanna í stærðfræði í meira en öld vegna fastheldni Breta á aðferðir Newtons. Þrátt fyrir þetta voru örsmæðir yfirleitt litnar hornauga. *Örsmæð* er tala sem er óendanlega nálægt núll en samt ekki núll - hvers konar tala er það? Örsmæðum var stundum lýst sem tölum á hreyfingu sem minnka niður í ekki neitt. Fræg er athugasemd Berkeleys biskups, sem kallaði örsmæðir „ghosts of departed quantities“, eða vofur horfinna stærða. Á 19. öld var hugtakið *markgildi* loks formlega skilgreint og þá var hægt að nota markgildi í stað örsmæða til að setja „örsmæðareikninginn“ fram á þann trausta hátt sem síðan hefur tíðkast. En örsmæðarithátturinn lifði þetta af. Og utan stærðfræðinnar, eins og í eðlisfræði, leyfðu menn sér áfram að beita örsmæðahugsun. Upp úr 1960 fékk Leibniz svo uppreisn æru, en þá sýndi Abraham Robinson loks fram á formlega tilvist örsmæða. Til þess þurfti háþróaða nútíma rökfræði og af þeim sökum hefur þessi endurreista örsmæðaaðferð ekki enn ógnað veldi markgildisaðferðarinnar.

Diffrun má hugsa þannig að $dx$ sé örlítil breyting á $x$ sem hafi í för með sér örlitla breytingu $dy$ á $y$ og að hallatalan $dy/dx$ sé hraði breytingarinnar. Ef $dx$ og $dy$ væru ekki örsmæðir heldur núll, mætti þetta ekki - 0/0 er merkingarleysa. Tegrun má hugsa þannig að heildarflatarmálið undir grafi $f$ sé summan af flatarmálum örmjórra strimla af hæð $f(x)$ og breidd $dx$. Táknið ∫ fyrir tegur er gamalt aflangt S og stendur fyrir summu. Leibniz glímdi lengi við að finna góðan ritþátt fyrir örsmæðareikning sinn, en í handriti frá 21. nóvember 1675 notar hann ritháttinn $\int f(x)dx$ í fyrsta sinn. Þar setur hann einnig fram regluna

$$d(x^n)/dx = nx^{n-1}$$

fyrir heilar og ræðar tölur $n$, sem og margfeldisregluna

$$d(yz)/dx = y \cdot dz/dx + z \cdot dy/dx$$

Í bréfi til Newtons ári síðar setur hann fram keðjuregluna, en hún er sérlega eftirminnileg í örsmæðarithætti:

$$dz/dx = dz/dy \cdot dy/dx$$

Takið eftir að örsmæðin $dy$ er bæði fyrir ofan og neðan strik og styttist þess vegna út. Árið 1676 neyddist Leibniz til að yfirgefa París af fjárhagsástæðum og þiggja starf í Hannover hjá hertoganum af Brunswick. Á leið sinni til Hannover fór hann um London og svo um Haag þar sem hann hitti Leeuwenhoek, sem uppgötvaði tilvist örvera, og heimspekinginn Spinoza, sem hann ræddi við dögum saman. Leibniz virti Spinoza fyrir vitsmuni hans en óaði við ályktunum hans, sem gengu gegn bæði kristilegum og gyðinglegum rétttrúnaði.

Hjá Brunswickættinni starfaði Leibniz til æviloka sem bókavörður, ráðgjafi og sagnritari. Eitt þeirra verka sem hann tók að sér var að dæla vatni úr námum í Harz-fjöllum. Til þess þróaði hann dælur og vindmyllur, sem skiluðu þó ekki tilætluðum árangri. Vegna þessa verkefnis varð hann einn af frumkvöðlum jarðfræðinnar. Hann setti meðal annars fram þá kenningu að jörðin hafi í upphafi verið bráðin. Brunswickmenn leyfðu Leibniz að fara sínu fram í heimspeki og stærðfræði. Árið 1679 lauk hann við þróun sína á tvíundarkerfinu, en birti ekki niðurstöðurnar fyrr en 1701, þegar hann var kosinn inn í Parísarakademíuna. Tvíundarkerfið liggur til grundvallar tölvum nútímans. Annað verk sem hann fékkst við var notkun ákveða til að leysa jöfnuhneppi. Hann leitaði lengi að rithætti fyrir þetta og í óbirtri grein frá 1684 er að finna mjög góðan ritþátt og niðurstöður. Í hreyfifræði lagði Leibniz áherslu á að það sem nú kallast hreyfiorka sé meira grundvallarhugtak en skriðþungi, sem var grundvallarhugtak hjá Descartes. Leibniz hafði um margt aðrar hugmyndir um eðlisfræði en Newton og eru sumar þeirra í meira samræmi við eðlisfræði 20. aldar. Til dæmis var hann andvígur hugmynd Newtons um hið algilda rúm.

Í heimspekiriti sínu *Théodicée*, sem kom út árið 1710, hélt hann því fram að heimurinn geti ekki verið fullkominn því þá væri ekki hægt að aðgreina hann frá guði. Heimurinn sé hins vegar sá besti sem guð gat skapað. Ef til dæmis ætti að útiloka náttúruhamfarir yrði að breyta náttúrulögmálunum, sem hefði í för með sér verri heim. Í ritinu *Monadologia*, sem kom út árið 1714, setti hann heimspeki-hugmyndir sínar fram á skipulegan hátt. Einn meginþáttur þeirra er sú kenning að heimurinn samanstandi af einangruðum *mónöðum*. Manneskjur séu meðal annars dæmi um mónöður. Þetta er einhvers konar hughyggjuútgáfa af atómhugmynd efnishyggjunnar. Leibniz var, ásamt Descartes og Spinoza, einn þriggja fremstu rökhyggjumanna 17. aldar. Rökfræði hans vísar bæði fram til nútímarökfræði og greiningarheimspeki og aftur til skólaspeki, þar sem niðurstöður eru leiddar af frumsendum en ekki byggðar á reynslu.

Leibniz tók að sér að skrifa sögu Brunswickættarinnar allt frá dögum Karls mikla. Á árunum 1687-90 ferðaðist hann um Þýskaland, Austurríki og Ítalíu og gróf upp gögn sem lutu að þessu verkefni. Á þessum ferðum sinnti hann einnig öðrum hugðarefnum sínum. Í Flórens átti hann til dæmis samræður við Viviani, síðasta nemanda Galíleós. Áratugir liðu og aldrei kom nein bók. Brunswickættin hefði sennilega verið hæstánægð með stuttan auglýsingabækling, en þegar allt efnið sem Leibniz hafði samviskusamlega safnað var loksins gefið út á 19. öld fyllti það þrjú bindi.
Árið 1714 varð höfuð ættarinnar, Georg Ludwig kjörfursti, konungur Stóra-Bretlands. Þótt Leibniz hafi átt drjúgan þátt í að svo varð, og þótt hann nyti stuðnings prinsessunnar af Wales, leyfði Georg honum ekki að flytja með sér til London þar til minnst eitt bindi af ættarsögunni, sem faðir hans hafði pantað næstum 30 árum áður, væri komið út. Hér hefur sennilega líka komið til að konungur vildi ekki móðga Newton með því að gera Leibniz að hirðmanni, en frá 1711 hafði Leibniz þurft að verjast heiftarlegum ásökunum um að hann hefði stolið örsmæðareikningnum frá Newton. Eini stuðningsmaður Leibniz í baráttunni gegn þessari ófrægingarherferð var Johann Bernoulli.

Leibniz lést 14. nóvember árið 1716 í Hannover, heilsulaus og þjakaður af þvagsýrugigt, yfirgefinn og stimplaður guðleysingi. Hann var ógiftur og enginn úr hirðinni nema ritari hans var viðstaddur jarðarförina. Leibniz var grafinn í ómerktri gröf, en síðar var sett á hana koparplata. Hvorki Konunglega vísindafélagið né Vísindaakademía Berlínar minntust hans. Að undirlagi hertogynjunnar af Orléans, sem var frænka vinkonu hans Sophiu kjörfurstynju, flutti Fontenelle minningarorð um Leibniz í Vísindaakademíu Parísar.

Leibniz var einn síðasti fjölfræðingurinn og hann var ófeiminn við að glíma við framandi verkefni á aðskiljanlegustu sviðum mannsandans. Með framlagi sínu til stærðfræði lagði hann hins vegar þungt lóð á þá vogarskál sem gerir nútímamönnum ókleift að vera fjölfræðingar.

# Jacob Bernoulli

Hermann Þórisson

Jacob Bernoulli (1655-1705) var svissneskur stærðfræðingur sem þróaði örsmæðareikning Leibniz, hnikareikning, algebru, aflfræði, raðir og líkindafræði. Hann sannaði meðal annars fyrstu meginsetningu líkindafræðinnar, lögmál mikils fjölda. Og þótt hann sé yfirleitt ekki kallaður heimspekingur þá setti hann fram nýstárlegar hugmyndir í þekkingarfræði.

Bernoulli fæddist í Basel í byrjun árs 1655 samkvæmt gregoríanska tímatalinusem almennt var ekki innleitt í mótmælendalöndum fyrr enn 1700. Föðurfjölskyldan var af niðurlenskum uppruna, upphaflega belgísk. Faðir Jacobs erfði kryddfyrirtæki sem faðir hans hafði stofnað í Amsterdam og svo flutt til Basel á flótta undan yfirgangi Spánverja sem réðu Hollandi og ofsóttu mótmælendur. Basel var miðstöð viðskipta í Mið-Evrópu. Faðir Jacobs átti sæti í borgarráði og móðirin var af mektarmönnum úr bönkum og borgarráði. Jacob var fyrstur í röð stærðfræðinga af Bernoulli-ætt og var þeirra fremstur ásamt Johanni yngri bróður sínum (1667-1748) og Daniel syni hans (1700-1782).

Faðir Jacobs vildi að hann yrði mótmælendaprestur svo hann lærði heimspeki og guðfræði við Basel-háskóla. Hann lauk MA-prófi í heimspeki sextán ára og Licenciat-prófi í guðfræði 21 árs gamall árið 1676. Samhliða þessu stundaði hann stærðfræði gegn vilja foreldra sinna.
Að námi loknu ferðaðist hann í fjögur ár um Sviss og Frakkland og kynnti sér stærðfræði og heimspeki, meðal annars rit Descartes (1596-1650). Þegar hann kom heim til Basel árið 1686 skrifaði hann sína fyrstu vísindagrein. Hún fjallaði um Kirch-halastjörnuna og þar hélt hann því fram að halastjörnur væru varanlegir efnishlutir sem lytu sömu eðlisfræðilögmálum og aðrir slíkir. Þetta var djarflega gert því samkvæmt guðfræðikreddum þess tíma notaði guðhalastjörnur til að koma skilaboðum til jarðarbúa. Í greininni fordæmdi hann einnig stjörnuspeki og kallaði stjörnuspekinga klækjarefi og svindlara.

Árið 1681 hélt hann í tveggja ára ferð til Hollands og Englands. Í Hollandi hitti hann meðal annars stærðfræðinginn Johann Hudde (1628-1704) og heimspekinginn Pierre Bayle (1647-1706). Sá síðarnefndi hafði einnig skrifað grein um Kirch-halastjörnuna (ekki undir nafni af skiljanlegum ástæðum) þar sem hann réðst gegn hindurvitnum og hélt því fram að kristni væri mannkyni ekki nauðsynleg og að guðlaust samfélag komi fyllilega til greina. Meðan Jacob var í Hollandi endurútgaf hann grein sína á latínu og gerði þar þá málamiðlun að þótt kjarni halastjarna sé varanlegt efni geti guðfræðingar haldið í halann sem tákn um reiði guðs. Í Englandi hitti hann stjarnfræðinginn John Flamsteed (1646-1719) í Greenwich, náttúruvísindamanninn

Robert Boyle (1627-1691) og heimspekinginn Robert Hooke (1635-1703) og fór á fund í Konunglega félaginu.

Þegar Jacob kom heim úr þessari ferð árið 1683 þáði hann ekki prestsembætti sem honum bauðst í Strassborg heldur hóf að kenna aflfræði við Basel-háskóla og giftist ári síðar. Árið 1687 var honum veitt staða prófessors í stærðfræði við skólann, þá 32 ára. Á þessum árum hófst samstarf hans og Johanns bróður hans sem var vel ellefu árum yngri. Faðir þeirra ætlaði Johanni að læra til læknis en meðfram því námi leiðbeindi Jacob honum í stærðfræði. Þeir voru með þeim fyrstu til að kynna sér og þróa örsmæðareikning Leibniz (1646-1716) sem leiddi meðal annars til svokallaðs hnikareiknings en hann kemur við sögu víða, meðal annars í geimferðum. Eitt af þeim verkefnum sem bræðurnir fengust við var spurningin um hvernig sú braut er sem tekur kúlu stystan tíma að rúlla eftir milli tveggja mishárra staða. Beint skábretti er ekki lausnin heldur bogi sem sveigir nokkuð niður fyrir áfangastaðinn. Samstarfið umhverfðist í skæða samkeppni þegar Johann tók að stæra sig úti í bæ af uppgötvunum sem Jacob taldi sínar. Ýmsir telja að Johann hafi verið öflugri en Jacob dýpri.

Jacob fann gildið á *e*, grunntölu náttúrulega lograns, við rannsókn á vaxtavöxtum: Þegar vextir eru 100% á ársgrundvelli og þeir eru lagðir á árlega

þá vex 1 króna í $(1 + 1/1)1 = 2$ á einu ári;

ef þeir eru lagðir á hálfsárslega

þá vex 1 króna í $(1 + 1/2)^2 = 2{,}25$ á einu ári;

ef þeir eru lagðir á ársfjórðungslega

þá vex ein króna í $(1 + 1/4)^4 = 2{,}44$ á einu ári;

ef þeir eru lagðir á vikulega

þá vex ein króna í 2,69 á einu ári;

ef þeir eru lagðir á daglega

þá vex ein króna í 2,71 á einu ári.

Ef þeir væru lagðir á samfellt (á sérhverju örsmáu sekúndubroti)

þá vex 1 króna í markgildið $e = 2{,}7182818...$

sem er markgildi talnarununnar: $(1+1/1)1$, $(1+1/2)^2$, $(1+1/3)^3$, $(1+1/4)^4$, . . .

Á árunum 1689-1704 skrifaði Jacob fimm greinar um raðir og sannaði meðal annars að markgildi raðarinnar $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ er óendanlegt en að markgildi raðarinnar $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots$ er tala sem er minni en tveir. Árið 1690 birti hann grein um jafntímaferilinn, en það er braut sem kúla rennur niður á sama tíma hvar sem hún byrjar í brautinni. Hann sýndi að ferillinn er lausn á diffurjöfnu og leysti hana. Í þessari grein var orðið *integral* notað í fyrsta sinn um tegur. Árið 1696 leysti Jacob diffurjöfnuna $y' = p(x)y + q(x)y^n$ sem kennd er við hann. Jacob fann einnig almenna aðferð til að ákvarða krappamiðjuferla, og svona mætti lengi telja.

Fljótlega eftir að Jacob kom heim úr seinni ferð sinni hóf hann að rannsaka fyrirbæri sem virðist vera eins óskylt stærðfræði og hugsanlegt er, óvissuna. Árið 1690 hafði hann lokið við að skrifa sitt mikilvægasta verk, bókina *Ars Conjectandi* sem kom út að honum látnum árið 1713. Hún er heilsteypt samantekt á talningar- og líkindafræði þess tíma með fjölmörgum nýjum sönnunum og niðurstöðum. Í henni sannar hann fyrstu meginsetningu líkindafræðinnar, *Lögmál mikils fjölda*.

Lögmál mikils fjölda má orða svona: Látum $p$ vera líkurnar á því að tiltekinn atburður $A$ gerist í einni tilraun og látum $N_n$ tákna fjölda skipta sem $A$ gerist þegar tilraunin er framkvæmd í $n$ óháð skipti. Þá gildir, þegar $n$ er nógu stórt, að hlutfallslega tíðnin $N_n/n$ er nálægt $p$ með líkum sem eru næstum einn (næstum 100%). Þetta samræmist vel þeirri almennu tilfinningu (nútímafólks) að þegar krónu sé kastað oft komi framhliðin upp í um það bil helmingi kasta, og þegar teningi sé kastað oft komi fyrirfram tiltekin hlið upp í um það bil einu af hverjum sex köstum.

Og Jacob lætur sér þetta ekki nægja heldur gefur hann útreiknanleg öryggismörk þannig að óþekkta $p$-ið er innan þeirra marka með fyrirframgefnum líkum. Þessar fyrirframgefnu líkur kallast nú öryggisstig en Jacob kallaði þær „móralska vissu“, þá vissu sem athugandinn getur sætt sig við. Markmið Jacobs með bókinni *Ars Conjectandi* mun ekki aðeins hafa verið stærðfræðilegt heldur átti hún ekki síður að leggja grundvöll að hagnýtum ákvarðanatökum til dæmis í stjórnmálum. Í bókinni færði hann svið líkindafræðinnar út fyrir fjárhættuspil og nálgaðist líkindi sem almennt hugtak sem skipti máli á öllum sviðum tilverunnar. Jacob var þeirrar skoðunar að stríð, hungursneyð og aðrar hörmungar þess tíma stöfuðu af illa ígrundaðri ákvarðanatöku. Í stað þess að byggja ákvarðanir á kreddum og sleggjudómum taldi hann að skoða bæri aðstæður og leggja reynslumat á líkur (meðal annars með Lögmáli mikils fjölda) og nota þetta mat svo til að spá fyrir um framtíðarárangur af ákvörðunum. Hann sagði jafnframt að náttúran í allri sinni fjölskrúðugu fegurð væri allt of flókin til að unnt væri að rekja öll orsakasambönd til upphafs síns − eins og margir stærðfræðilegir hugsuðir hefðu tilhneigingu til að reyna − heldur skyldi byggja ákvarðanir á reynslustuddum líkum og líkindafræði. Þetta var nýstárleg heimspekileg afstaða á þeim tímum.

Ein ástæða þess að Jacob gaf ekki út bókina strax er talin sú að hann var að leita að tölulegum gögnum til að sýna hvernig beita skyldi þessum hugmyndum, en slík gögn lágu ekki á lausu á þeim tímum. Meðal annars sendi hann Leibniz ítrekað bréf þar sem hann þrábað hann um að senda sér bók sem kom út á þeim tíma með fyrstu upplýsingum um lífslíkur. En Leibniz bar fyrir sig að hann fyndi ekki bókina og sagði líka að hún væri ósköp ómerkileg − og staðfesti kannski með því álit Jacobs á skilningsleysi stærðfræðihugsuða síns tíma á mikilvægi gagna og reynslu.

Jacob lést úr berklum árið 1705, fimmtugur að aldri. Hann mælti svo fyrir að á legstein sinn yrði sett mynd af spíral sem hann dáðist mjög að og kallaði töfraspíral. Töfraspírallinn hefur þann eiginleika að hann lítur eins út frá öllum punktum á honum ef hann er skalaður út frá fjarlægðinni frá upphafspunkti. Þessi eiginleiki er nú kallaður *sjálfsvipun*.

Hjá spíralnum átti að rita latnesku orðin: *Eadem mutata resurgo* (Breyttur en þó samur rís ég á ný). Fyrir handvömm var settur svokallaður Arkímedesarspírall á legsteininn en hann er ekki sjálfsvipaður.

# Andrei Nikolaevich Kolmogorov

Hermann Þórisson

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) var einn fremsti stærðfræðingur Sovétríkjanna, jafnvel sá fremsti. Hann er þekktastur fyrir að leggja formlegan grunn að nútíma líkindafræði og fyrir rannsóknir á því sviði. En brautryðjendastarf hans á öðrum sviðum stærðfræða var líka umfangsmikið og risti djúpt.

Móðir hans, Mariya Yakovlevna Kolmogorova, var á leið heim frá Krím til Tunoshna í Rússlandi þegar hann fæddist og hún lifði barnsburðinn ekki af. Hún var ógift og systir hennar Vera Yakovlena Kolmogorova gekk honum í móður stað. Kolmogorov ólst upp á heimili afa síns sem var aðalsmaður. Fjölskyldan tók þátt í andspyrnunni gegn keisaraveldinu og þær Mariya og Vera voru settar í varðhald mánuðum saman vegna þess. Á heimilinu var leynileg prentsmiðja og eitt sinn er húsleit var gerð voru andspyrnurit gegn keisaraveldinu falin undir vöggu Kolmogorovs og fundust ekki. Fimm eða sex ára uppgötvaði hann regluna að

$1 = 1^2$
$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ ***og svo framvegis.***

Í unglingaskóla hannaði hann eilífðarvélar og faldi svo vel hvernig þær voru í rauninni drifnar að kennararnir áttuðu sig ekki á því. Faðir Kolmogorovs, Nikolai Matveevich Kataev, lærði búfræði. Hann var sendur í útlegð en varð svo deildarstjóri í búnaðarráðuneytinu eftir byltingu. Hann féll á suðurvígstöðvunum árið 1919. Kolmogorov hóf nám í stærðfræði við Moskvuháskóla árið 1920. Hann kynnti sér líka málmfræði og sögu og fyrstu rannsóknir hans fjölluðu um landeignir í Novgorod á 15. og 16. öld. Sögukennarinn er sagður hafa gert þá (réttmætu) athugasemd að Kolmogorov hafi aðeins lagt fram eina sönnun á niðurstöðu sinni og slíkt dugi kannski í stærðfræði en sagnfræðingar vilji helst tíu sannanir.

Stórveldi Sovétríkjanna í stærðfræði var arfur frá keisaratímanum. Rætur þess má rekja til Pétursborgarakademíunnar sem Pétur mikli stofnaði á 18. öld. Sovétríkin ræktuðu þennan arf vel. Samtíða Kolmogorov í Moskvu voru meðal annars Egorov, Suslin, Urysohn, Khinchin, Stephanov sem var helsti kennari Kolmogorovs í byrjun, Luzin sem varð leiðbeinandi hans í doktorsnámi, og Aleksandrov sem hann bast ævilöngum vináttuböndum.

Fyrstu stærðfræðiuppgötvanir Kolmogorovs voru í Fourier-greiningu. Vakti ein niðurstaða hans strax alþjóðlega athygli: Hann setti fram fyrsta dæmið um tegranlegt fall með Fourier-röð sem er ósamleitin næstum alls staðar (*næstum alls staðar* skerpti hann síðar í *alls staðar*). Þetta var árið 1922 þegar hann var aðeins 19 ára og enn í grunnnámi. Þremur árum síðar skrifaði hann, ásamt Khinchin, fyrstu grein sína um líkindi. Þar var þriggja raða setningin um sterka samleitni slembistærðarunu og Kolmogorov-ójafnan. Þessar niðurstöður leiddu síðar af sér martingalaójöfnurnar og slembigreiningu.

Þegar hér var komið sögu, árið 1925, hóf Kolmogorov doktorsnám. Því lauk árið 1929 og þá hafði hann skrifað 18 greinar. Þær fjölluðu meðal annars um hið sterka lögmál mikils fjölda, um lögmál ítrekaða lograns, um útvíkkun á diffrun og tegrun og um lögmálið um annað tveggja í innsæisrökfræði. Að loknu doktorsnámi lagðist Kolmogorov í ferðir með Aleksandrov, bæði niður Volgu og áfram um Kákasus til Armeníu til að endurnærast eftir áratugarlöng átök, og svo um Þýskaland og Frakkland þar sem hann átti langar samræður við þá Lévy og Fréchet sem voru í fararbroddi líkindarannsókna í Vestur-Evrópu.

Árið 1931 varð Kolmogorov prófessor við Moskvuháskóla. Sama ár birti hann grein um Markovferli í samfelldu rúmi og tíma. Hún lagði grunninn að nútíma flöktferlum og þar var sett fram sambandið milli Markovferla og hlutafleiðujafna. Þótt þessi grein hafi fjallað um slembiferli (fyrirbæri sem þróast í tíma háð tilviljun) var það gert með aðferðum stærðfræðigreiningar en ekki líkindafræði.

Enn var eftir að leggja nægilega traustan grunn að líkindafræðinni. Það gerði Kolmogorov svo í hnitmiðaðri grein, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits-rechnung*, sem kom út árið 1933. Skilgreining Kolmogorovs á líkindum er furðanlega sjálfsögð: minnstu líkindi eru 0, mestu líkindi eru 1, og ef atburður (takið eftir því að hugtakið atburður hefur hér ekki verið skilgreint formlega, þar liggur hundur grafinn, leiðum hann hjá okkur) er samsettur af runu ósamrýmanlegra atburða þá eru líkindin á honum summan af líkindum þeirra hvers fyrir sig.

Haft er eftir Bertrand Russell að allir tali um líkindi en enginn viti hvað þau eru. Ýmsir (von Mises, Keines, de Finetti) reyndu að skilgreina líkindi á grundvelli einhverrar veruleikatúlkunar en Kolmogorov horfði einfaldlega fram hjá því hvað líkindi „eru“. Hann lagði aðeins stærðfræðilega eiginleika þeirra til grundvallar. Þetta leysti líkindafræðina úr læðingi með því að losa hana við veruleikatúlkun og gera hana að hreinni stærðfræði. Næsta áratuginn helltust yfir nýjar niðurstöður og mörg ný sérsvið tóku að mótast.

Samhliða þessu hélt Kolmogorov áfram að láta til sín taka á öðrum sviðum stærðfræða. Í grannfræði setti hann fram og rannsakaði hjásvipfræðigrúpur á fjórða áratugnum samtímis og óháð Alexander. Á stríðsárunum birti hann tvær grundvallandi greinar um iðufræði. Þau fræði skipta til dæmis máli fyrir loftflæði úr þotuhreyflum og fyrir hafstrauma, en þess má geta að árin 1970-72 sigldi Kolmogorov umhverfis jörðina með rannsóknaskipi sem stjórnandi rannsókna á iðukenndum hafstraumum. Á sjötta áratugnum skrifaði hann mikilvægar greinar um hreyfifræði sem lutu að gangi himintungla.

Árið 1900 lagði David Hilbert 23 verkefni fyrir stærðfræðinga tuttugustu aldar. Kolmogorov leysti þrettánda verkefnið árið 1957 með því að sýna, andstætt því sem Hilbert hélt, að samfellt fall af þremur breytistærðum megi setja fram (á vissan hátt) með samfelldum föllum af tveimur breytistærðum. Árið 1933 hafði hann leyst fyrsta atriðið í sjötta verkefni Hilberts með því að setja líkindafræðina á frumsendugrunn. Hann gerði reyndar aðra atlögu að því verkefni: Á sjöunda áratugnum kynnti hann til sögunnar og þróaði flækjufræði en hún fjallar um hvað það þýði að ein tiltekin talnaruna sé *slembin í sér*. Þetta slembihugtak er gjörólíkt því sem líkindafræðin fæst við þar sem talnaruna er slembin vegna þess hvernig hún verður til, eins og til dæmis við endurtekin krónuköst.

Árið 1942 kvæntist Kolmogorov Önnu Dmitrievnu Egorovu. Þau eignuðust ekki börn en frá því hann kenndi í unglingaskóla til að halda sér uppi í háskólanámi hafði hann hins vegar yndi af að kenna áhugasömum börnum. Samhliða þróun flækjufræðinnar tók hann að sér einn af skólum Moskvuháskóla fyrir hæfileikarík börn og varði ómældum tíma í að semja kennsluefni og kenna þeim.

Að lokum má geta þess að sá sem þetta skrifar var gestur við Steklov stærðfræðistofnunina í Moskvu í október 1987, þegar Kolmogorv lá banaleguna, og átti samræður við Prokhorov nemanda hans sem þá var yfir stofnuninni. Prokhorov sagði að Kolmogorov hefði komið til Íslands og orðið yfir sig hrifinn af hversu opið og lýðræðislegt þjóðfélagið var.