Hermann Þórisson

TÖLFRÆÐI

YFIRLIT

Þetta hefti um **tölfræði** byggir á heftinu LÍKINDAREIKNINGUR.

Myndskeiðin T01-T41 byggja á glærunum í þessu hefti.

Sum myndskeið eru brotin upp í nokkra aðgreinda hluta sem eru merktir a, b og jafnvel c, d.
Þessir hlutar eru þá nátengdir.

Örfáar villur fundust í þeirri gerð af glærunum sem notuð var við upptökur.
Bent er á villurnar þar sem þær koma fyrir og þær hafa verið leiðréttar í þessari útgáfu.

Glærurnar skiptast í fimm hluta sem eru aðgreindir með yfirliti yfir myndskeið og efni.
Takið eftir að eingöngu glærurnar sjálfar eru tölusettar (en ekki svarthvítu yfirlitssíðurnar).

Prentun: Háskólaprent, 2022

SLEMBIÚRTAK

Yfirlit yfir myndskeið og efni

Skeið	Lengd	Síður	Efni
T01	12:21	Á töflu	Sýnidæmi um PUNKTMAT – BILMAT – TILGÁTUPRÓF
T02	5:21	Töl 1	Inngangsorð
T03	4:01	Töl 2	Úrtak Lýsistærð
T04	9:09	Töl 3	Meðaltal Úrtaksdreifni
T05	8:16	Töl 4	Normlegt úrtak

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

T01 fyrsta myndskeið um tölfræði

12:21 12 mínútur og 21 sekúnda

Töl 1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

TÖLFRÆÐI

Þegar gögnum er safnað/mælingar framkvæmdar/ tilraunir gerðar, fást athuganir/gögn/niðurstöður, t.d. tölur
$$x_1, \ldots, x_n.$$

Lýsandi tölfræði fæst við að setja svona gögn fram á aðgengilegan/skiljanlegan/samanþjappaðan/myndrænan hátt, t.d. með línuritum og skífuritum.

Stærðfræðileg tölfræði fæst hins vegar við að draga ályktanir af gögnum á grundvelli líkindafræði. Sambandið milli talnanna $x_1, \ldots, x_n$ og slembistærða $X_1, \ldots, X_n$ er þá þannig að tölurnar eru gildi sem slembistærðirnar taka þegar tilraun er framkvæmd.

Athugið að það er ekkert slembið við $x_1, \ldots, x_n$. Það sem er slembið er hvernig þessar tölur eru fengnar.

Í fyrirlestrunum sem nú eru að hefjast verður fjallað um nokkur frumatriði stærðfræðilegrar tölfræði. Þeir byggja á fyrirlestrunum um líkindareikning.

Athyglinni verður að mestu leyti beint að slembistærðum $X_1, \ldots, X_n$ sem eru óháðar og allar með sömu dreifingu, þ.e. allar með sama dreififall F.

Athugasemd: Erlenda orðið *statistics*, *statistik*, þýddi upprunalega *tölur ríkisins* (state, stat, ríki). Orðið er núna notað um jafnt lýsandi sem stærðfræðilega tölfræði, en líka almennt um töluleg gögn.

Á íslensku hljómar ankannalega að nota orðið tölfræði um töluleg gögn. Gögn eru ekki fræði.

Slembiúrtak – Lýsistærð

Ef $X_1, ..., X_n$ eru óháðar og allar með sömu dreifingu F kallast þær ***slembiúrtak*** (eða bara ***úrtak***) úr F.

Ef stærðirnar eru samfelldar með þéttleika $f = F'$ eða strjálar með líkindafall p,

$$p(x) = \mathbf{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R},$$

segjum við líka að þær séu úrtak úr f eða p.

Við segjum loks að stærðirnar séu úrtak úr t.d. $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ef F er dreififall $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Tölur $x_1, \ldots, x_n$, sem fást við að framkvæma tilraun og skrá gildin sem slembistærðirnar $X_1, \ldots, X_n$ taka, kallast ***athugað úrtak*** úr F (eða bara ***úrtak*** ef engin hætta er á ruglingi).

Í framhaldinu látum við (nema annað sé tekið fram) $X_1, \ldots, X_n$ vera slembiúrtak, X vera slembistærð með sömu dreifingu og þessar stærðir, setjum

$$\mu = \mathbf{E}[X] \quad \text{og} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$$

og göngum út frá því að $-\infty < \mu < \infty$ og $0 < \sigma < \infty$

Fall $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sem ekki er háð því hver dreifingin F er, kallast ***lýsifall***. Slembistærðin

$$D = d(X_1, \ldots, X_n) \text{ kallast } \textbf{\textit{lýsistærð}}.$$

Talan

$$d(x_1, \ldots, x_n) \text{ kallast } \textbf{\textit{lýsitala}}.$$

Dæmi um d er meðaltal, hæsta gildi, lægsta gildi, ... Hinsvegar er t.d. meðaltal mínus μ ekki lýsifall.

Lýsistærðirnar $\bar{X}$ og S^2

Setjum

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \textit{meðaltal}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \textit{úrtaksdreifni}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \textit{staðalfrávik úrtaks}$$

Reikniregla: $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$

Sönnun: $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ (skilgreining)

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

Eins fyrir athugað úrtak: $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Regla: $\mathbf{E}[\bar{X}] = \mu$ og $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$ og $\mathbf{E}[S^2] = \sigma^2$

Sönnun: Höfum $\mathbf{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$ og vegna óhæðis $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \sigma^2/n$

Notum svo reikniregluna fyrir S^2 ásamt svipaðri reglu af hliðarglæru 32, $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$:

$$(n-1)\mathbf{E}[S^2] = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}[X_i^2] - n\mathbf{E}[\bar{X}^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Var}[X_i] + \mathbf{E}[X_i]^2\right) - n\left(\mathrm{Var}[\bar{X}] + \mathbf{E}[\bar{X}]^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2)$$

$$= n(\sigma^2 + \mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2) = n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$

Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – $\bar{X}$ og S^2 – χ^2_r og t_r

Látum $Z_1, \ldots, Z_r$ vera óháðar $\mathrm{N}(0,1)$ stærðir. Dreifing

$$Z_1^2 + \ldots + Z_r^2 \quad \text{kallast } \chi^2_r\text{-}\textit{dreifing}.$$

Slembistærð Y með þessa dreifingu kallast χ^2_r-***stærð***, eða χ^2-***stærð*** með r ***frígráður***. Skrifum $Y \sim \chi^2_r$.

Regla (sönnun sleppt): Fyrir úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gildir

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$\bar{X}$ og S^2 eru óháðar

Látum Z og Y vera óháðar, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ og $Y \sim \chi^2_r$. Dreifing

$$T_r = \frac{Z}{\sqrt{Y/r}} \quad \text{kallast } t_r\text{-}\textit{dreifing}.$$

Slembistærð T með þessa dreifingu kallast t_r-***stærð***, eða t-***stærð*** með r ***frígráður***. Skrifum $T \sim t_r$.

Fylgiregla: Fyrir úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gildir

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad \text{og} \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Sönnun: Stöðlun $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ gefur fyrra atriðið. Síðara atriðið fæst með því að nota að

$Z := \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ er óháð $Y := (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

sem gefur lokaskrefið í

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{Z}{S/\sigma} = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}} \sim t_{n-1}$$

PUNKTMAT

Yfirlit yfir myndskeið og efni

Skeið	Lengd	Síður	Efni
T06	5:25	Töl 5	Óþekktur stiki Mat Metill
T07	7:10	Töl 6	Sennileiki Sennileikamat/metill
T08	6:00	Töl 7	Sennileikamat Samantekt
T09	12:51	Töl 8-11	Sennileikamat Ber Poi Geo Exp
T10	9:54	Töl 12-14	Sennileikamat Normleg úrtök
T11	9:00	Töl 15	Sennileikamat Jöfn dreifing
T12	7:12	Töl 16	Bjagi Bjagaleysi
T13	7:19	Töl 17	Meðalfervik Skilvirkni
T14	7:51	Töl 18	Samvegnir metlar Skilvirkni
T15	11:58	Töl 19	Samvegna úrtaksdreifnin fyrir óháð normleg úrtök

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

T01 fyrsta myndskeið um tölfræði

12:21 12 mínútur og 21 sekúnda

Töl 1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

PUNKTMAT – Metill – Óþekktur stiki

Líkindafræðin fjallar um hvað F segir um úrtakið. Tölfræðin fjallar um hvað úrtakið segir um F.

Í framhaldinu munum við fást við úrtök úr dreifingu F_θ þar sem θ er óþekktur stiki eða vigur stika.

Dæmi:	$\text{Ber}(p),\ 0 < p < 1.$		$\theta = p$
	$\text{Poi}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$		$\theta = \lambda$
	$\text{Geo}(p),\ 0 < p < 1.$		$\theta = p$
	$\text{Exp}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$		$\theta = \lambda$
$\text{N}(\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty.$		σ^2 þekkt	$\theta = \mu$
$\text{N}(\mu, \sigma^2),\ 0 < \sigma^2 < \infty.$		μ þekkt	$\theta = \sigma^2$
$\text{N}(\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty.$			$\theta = (\mu, \sigma^2)$

Verkefnið er að komast nærri um hvað þessi θ er. Þetta er gert á þrjá vegu, með punktmati sem við byrjum á, svo með bilmati og loks með tilgátuprófi.

Lýsistærð $D = d(X_1, \ldots, X_n)$ sem notuð er til að giska á stika θ kallast *metill* fyrir θ.
Athugaða gildið $d(x_1, \ldots, x_n)$ kallast *mat* á θ.

Ef $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ er vigur og $D_1, \ldots, D_k$ eru lýsistærðir sem notaðar eru til að meta $\theta_1, \ldots, \theta_k$ þá kallast $(D_1, \ldots, D_k)$ *metill* fyrir θ og athugaði vigurinn *mat*.

Ef γ er fall af θ, $\gamma := g(\theta)$, köllum við γ líka stika. Ef lýsistærð D er notuð til að meta γ kallast D *metill* fyrir γ og athugaði vigurinn kallast *mat* á γ.

Algengir metlar eru meðaltalið $\bar{X}$ fyrir μ, úrtaksdreifnin S^2 fyrir σ^2, og $(\bar{X}, S^2)$ fyrir (μ, σ^2).

Sennileiki – Sennileikamat

Það er sjaldnast augljóst hvaða lýsistærð er góður metill fyrir θ. Öflugusta almenna aðferðin til að finna metil er sennileikaaðferðin.

Ef $x_1, \ldots, x_n$ er athugað úrtak úr líkindafalli p_θ eða þéttleika f_θ þá er ***sennileiki*** (eða ***sennileikafall***) θ fallið $L_{x_1,\ldots,x_n}$ sem varpar θ í

$$L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta) = p_\theta(x_1)\ldots p_\theta(x_n) \quad \text{(strjála tilvikið)}$$

$$L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta) = f_\theta(x_1)\ldots f_\theta(x_n) \quad \text{(samfellda tilvikið)}$$

Takið eftir að stikinn θ hefur verið gerður að breytu í $L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)$ og breyturnar $x_1, \ldots, x_n$ að stikum.

Til einföldunar skrifum oft $L(\theta)$ í stað $L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)$.

Þó að orðin sennileiki og líkindi hafi sömu merkingu í íslensku þá hafa þau ólíka merkingu í tölfræði. Sennileiki θ þýðir ekki líkurnar á að θ sé rétta gildið á óþekkta stikanum. Sennileiki θ þýðir (í strjála tilvikinu) líkurnar á að stærðirnar $X_1, \ldots, X_n$ taki gildin $x_1, \ldots, x_n$ ef rétta gildið á stikanum er θ.

Skilgreining: Ef $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ hámarkar $L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)$ kallast

$$\hat{\theta} := \theta(x_1, \ldots, x_n) \text{ ***sennileikamat*** á } \theta$$

$$\hat{\Theta} := \theta(X_1, \ldots, X_n) \text{ ***sennileikametill*** fyrir } \theta$$

Sennileikamat á $\gamma = g(\theta)$ er $\hat{\gamma} = g(\hat{\theta})$ og ***-metill*** er $g(\hat{\Theta})$

Hér höfum við leyft okkur að nota táknið fyrir stikann θ líka fyrir fall θ sem varpar $x_1, \ldots, x_n$ í gildi á stikanum, $\theta(x_1, \ldots, x_n)$, sem hámarkar sennileikann.

Sennileikamat – Samantekt

Til að hámarka $L(\theta)$ er heppilegt að taka logrann sem breytir margföldun í samlagningu

$\ln L(\theta) = \ln p_\theta(x_1) + \ldots + \ln p_\theta(x_n)$ (strjála tilvikið)

$\ln L(\theta) = \ln f_\theta(x_1) + \ldots + \ln f_\theta(x_n)$ (samfellda tilvikið)

Föllin L og $\ln L$ hámarkast á sömu stöðum.

Á næstu síðum leiðum við út sennileikamat í nokkrum mikilvægum tilvikum. Í þeim öllum (nema því síðasta) er hámarkið fundið með því að leysa

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0.$$

Hér er samantekt á niðurstöðunum:

Úrtak	Sennileikamat
$\mathrm{Ber}(p),\ 0 < p < 1.$	$\hat{p} = \bar{x}$
$\mathrm{Poi}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$	$\hat{\lambda} = \bar{x}$
$\mathrm{Geo}(p),\ 0 < p < 1.$	$\hat{p} = 1/\bar{x}$
$\mathrm{Exp}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$	$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty.$ σ^2 þekkt	$\hat{\mu} = \bar{x}$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ 0 < \sigma^2 < \infty.$ μ þekkt	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu)^2$
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty.$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (\bar{x}, \frac{n-1}{n} s^2)$
$\mathrm{Unf}[0, \theta],\ 0 < \theta < \infty.$	$\hat{\theta} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$

Takið eftir að þegar báðir normlegu stikarnir μ og σ^2 eru óþekktir þá er sennileikamatið á σ^2 **ekki** $s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2$ **heldur** $\frac{n-1}{n} s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$.

Sennileikamat – Ber(p), $0 < p < 1$.

Líkindafallið er

$$\mathbf{P}(X=1) = p \quad \text{og} \quad \mathbf{P}(X=0) = 1-p$$

sem við getum umskrifað

$$\mathbf{P}(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Sennileikinn er því

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \dots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

þ.e.

$$L(p) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}.$$

Tökum lograrnn

$$\ln L(p) = \sum x_i \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \ln(1-p).$$

Þetta fall af p er diffranlegt á bilinu $(0,1)$ og stefnir á $-\infty$ þegar $p \to 0$ og þegar $p \to 1$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \sum x_i/p - \left(n - \sum x_i\right)/(1-p).$$

Setjum $\frac{d}{dp} \ln L(p) = 0$ sem gefur

$$\sum x_i/p = \left(n - \sum x_i\right)/(1-p)$$

þ.e.

$$(1-p)\sum x_i = p\left(n - \sum x_i\right)$$

þ.e.

$$\sum x_i = pn\,.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $p = \frac{1}{n}\sum x_i$ svo

$\hat{p} = \bar{x}$ er sennileikamatið á p

$\bar{X}$ er sennileikametillinn fyrir p.

Sennileikamat – $\mathrm{Poi}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$

Líkindafallið er

$$\mathbf{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Sennileikinn er því

$$L(\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \ldots e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

þ.e.

$$L(\lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\,\lambda^{\sum x_i}}{x_1! \ldots x_n!}, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Tökum logrann

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \sum x_i \ln\lambda - \ln(x_1! \ldots x_n!).$$

Þetta fall af λ er diffranlegt á bilinu $(0, \infty)$ og stefnir á $-\infty$ þegar $\lambda \to 0$ og þegar $\lambda \to \infty$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\tfrac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \sum x_i/\lambda\,.$$

Setjum $\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda) = 0$ sem gefur

$$n = \sum x_i/\lambda\,.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $\lambda = \frac{1}{n}\sum x_i$ svo

$\hat{\lambda} = \bar{x}$ **er sennileikamatið á λ**

$\bar{X}$ **er sennileikametillinn fyrir λ.**

Sennileikamat – $\mathrm{Geo}(p)$, $0 < p < 1$.

Líkindafallið er

$$\mathbf{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Sennileikinn er því

$$L(p) = p(1-p)^{x_1-1} \ldots p(1-p)^{x_n-1}$$

þ.e.

$$L(p) = p^n(1-p)^{\sum x_i - n}.$$

Tökum logrann

$$\ln L(p) = n \ln p + \left(\sum x_i - n\right) \ln(1-p).$$

Þetta fall af p er diffranlegt á bilinu $(0, 1)$ og stefnir á $-\infty$ þegar $p \to 0$ og þegar $p \to 1$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = n/p - \left(\sum x_i - n\right)/(1-p).$$

Setjum $\frac{d}{dp} \ln L(p) = 0$ sem gefur

$$n/p = \left(\sum x_i - n\right)/(1-p)$$

þ.e.

$$(1-p)n = p\left(\sum x_i - n\right)$$

þ.e.

$$n = p \sum x_i.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $p = n / \sum x_i$ svo

$\hat{p} = 1/\bar{x}$ er sennileikamatið á p

$1/\bar{X}$ er sennileikametillinn fyrir p.

Sennileikamat – $\text{Exp}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$

Þéttleikinn er

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0.$$

Sennileikinn er því

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \dots \lambda e^{-\lambda x_n}, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

þ.e.

$$L(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

Tökum logrann

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i.$$

Þetta fall af λ er diffranlegt á bilinu $(0, \infty)$ og stefnir á $-\infty$ þegar $\lambda \to 0$ og þegar $\lambda \to \infty$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = n/\lambda - \sum x_i\,.$$

Setjum $\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = 0$ sem gefur

$$n/\lambda = \sum x_i.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $\lambda = n/\sum x_i$ svo

$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ er sennileikamatið á λ

$1/\bar{X}$ er sennileikametillinn fyrir λ.

Sennileikamat – $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – σ^2 þekkt

Látum μ vera óþekkt og σ^2 þekkt. Þéttleikinn er

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^{-1}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sennileikinn er því

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}, \quad -\infty < \mu < \infty.$$

Tökum logrann

$$\ln L(\mu) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu)^2.$$

Þetta fall af μ er alls staðar diffranlegt og stefnir á $-\infty$ þegar $\mu \to -\infty$ og þegar $\mu \to \infty$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\frac{d}{d\mu} \ln L(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i - \mu)\,.$$

Setjum $\frac{d}{d\mu} \ln L(\mu) = 0$ sem gefur $\sum(x_i - \mu) = 0$ þ.e.

$$\sum x_i = n\mu\,.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $\mu = \frac{1}{n}\sum x_i$ svo

$\hat{\mu} = \bar{x}$ er sennileikamatið á μ

$\bar{X}$ er sennileikametillinn fyrir μ

þegar σ^2 er þekkt.

Sennileikamat – $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – μ þekkt

Látum μ vera þekkt og σ^2 óþekkt. Þéttleikinn er

$$f_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma^2)^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sennileikinn er því

$$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma^2)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2)^{-1}\sum(x_i-\mu)^2}, \quad \sigma^2 > 0.$$

Tökum logrann

$$\ln L(\sigma^2) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - (n/2) \ln \sigma^2 - \frac{1}{2}(\sigma^2)^{-1} \sum (x_i - \mu)^2.$$

Þetta fall af σ^2 er diffranlegt á bilinu $(0, \infty)$ og stefnir á $-\infty$ þegar $\sigma^2 \to 0$ og þegar $\sigma^2 \to \infty$. Hámarkið er því tekið og afleiðan er þar 0. Diffrum og fáum

$$\frac{d}{d\sigma^2} \ln L(\sigma^2) = \frac{-n}{2}(\sigma^2)^{-1} + \frac{1}{2}(\sigma^2)^{-2} \sum (x_i - \mu)^2.$$

Setjum $\frac{d}{d\sigma^2} \ln L(\sigma^2) = 0$ sem gefur

$$\frac{n}{2}(\sigma^2)^{-1} = \frac{1}{2}(\sigma^2)^{-2} \sum (x_i - \mu)^2$$

þ.e.

$$n\, \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2.$$

Afleiðan er því 0 ef og aðeins ef $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2$ svo

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2$$ **er sennileikamatið á σ^2**

$$\frac{1}{n} \sum (X_i - \mu)^2$$ **er sennileikametillinn fyrir σ^2**

þegar μ er þekkt.

Athugasemd: Fallið L á þessari síðu er ekki sama fallið og L á síðunni hér á undan þó að við notum sama táknið L í báðum tilvikum. Sama á við um fallið L á næstu síðu.

Sennileikamat – $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – hvorugt þekkt

Látum bæði μ og σ^2 vera óþekkt. Þéttleikinn er

$$f_{(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^{-1}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sennileikinn er nú fall af tveimur breytum

$$L(\mu, \sigma^2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}.$$

Takið eftir að ef við höldum breytunni μ fastri þá fáum við sennileikafallið á síðunni hér á undan. Þar fékkst að fyrir það μ hámarkast $\sigma^2 \to L(\mu, \sigma^2)$ þegar

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \mu)^2.$$

Takið líka eftir að ef við höldum breytunni σ^2 fastri þá fáum við sennileikafallið á síðunni þar á undan. Þar fékkst að fyrir allar σ^2 hámarkast $\mu \to L(\mu, \sigma^2)$ þegar

$$\mu = \bar{x}.$$

Þetta gefur að $(\mu, \sigma^2) \to L(\mu, \sigma^2)$ hámarkast þegar

$$(\mu, \sigma^2) = \Big(\bar{x},\ \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2\Big)$$

svo

$\hat{\mu} = \bar{x}$ er sennileikamatið á μ

$\bar{X}$ er sennileikametillinn fyrir μ

og

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ er sennileikamatið á σ^2

$\frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$ er sennileikametillinn fyrir σ^2

þegar hvorki μ né σ^2 eru þekkt.

Sennileikamat – $\mathrm{Unf}[0, \theta], \ 0 < \theta < \infty.$

Eftirfarandi dæmi sýnir að logrun og diffrun er ekki alltaf rétt leið til að ákvarða sennileikamat.

Þéttleiki $\mathrm{Unf}[0, \theta], \ 0 < \theta < \infty$, er

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \textbf{annars}. \end{cases}$$

Sennileikinn er því

$$L(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n, & \theta \geqslant \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i \\ 0, & \theta < \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i \end{cases}$$

Þetta fall tekur hæsta gildi í $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i$ þar sem það stekkur úr 0 í $\left(\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i\right)^{-n}$ og er því ekki diffranlegt.

Þar eð $\theta = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i$ hámarkar $L(\theta)$ höfum við að

$\hat{\theta} = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i$ er sennileikamatið á θ

$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} X_i$ er sennileikametillinn fyrir θ

Leiðum út dreififall þessa metils:

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant x\right) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 \leqslant x) \ldots \mathbf{P}(X_n \leqslant x) = \left(\tfrac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant \theta.$$

Þéttleikinn er því $\frac{n}{\theta^n} x^{n-1}$, $0 \leqslant x \leqslant \theta$, og væntigildið

$$\mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant i\leqslant n} X_i\right] = \int_0^\theta x \tfrac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \tfrac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \tfrac{n}{\theta^n} \tfrac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

þ.e.

$$\mathbf{E}\left[\max_{0\leqslant i\leqslant n} X_i\right] = \frac{n}{n+1}\,\theta$$

Bjagi metils

Skoðum metil D fyrir óþekktan stika $\theta \in H$ þar sem $H \subseteq \mathbb{R}$, t.d. $H = \mathbb{R}$, $H = [0, \infty)$ eða $H = [a, b]$. ***Bjagi*** D er

$$b_\theta(D) = \mathbf{E}_\theta[D] - \theta, \quad \theta \in H.$$

Hér er θ hengd á $\mathbf{E}_\theta$ til að minna á að væntigildið breytist með θ.

Metillinn D kallast ***bjagalaus*** eða ***óbjagaður*** ef

$$b_\theta(D) = 0, \quad \theta \in H,$$

þ.e. ef væntigildi hans er það sem verið er að meta,

$$\mathbf{E}_\theta[D] = \theta, \quad \theta \in H.$$

Í þessari umfjöllun má skipta θ út fyrir $\gamma = g(\theta)$. ***Bjagi*** metils D fyrir γ er $\quad \mathbf{E}_\theta[D] - g(\theta), \quad \theta \in H,$ og D er ***bjagalaus*** eða ***óbjagaður*** ef bjaginn er 0 þ.e.

$$\mathbf{E}_\theta[D] = g(\theta), \quad \theta \in H.$$

Metlarnir $\bar{X}$ og S^2 fyrir μ og σ^2 eru alltaf óbjagaðir. Þar eð $\mathbf{E}[S^2] - \mathbf{E}[S]^2 = \mathrm{Var}[S^2] > 0$ er því $\mathbf{E}[S] < \sigma$.

Sennileikametillinn $\frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ fyrir σ^2 í $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ úrtaki (báðir stikar óþekktir, $\theta = (\mu, \sigma^2)$) er bjagaður því $\mathbf{E}[\frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Þennan metil má gera óbjagaðan með því að margfalda með $\frac{n}{n-1}$.

Sennileikametilinn á síðustu síðu er bjagaður en margföldun með $\frac{n+1}{n}$ gefur $\mathbf{E}\left[\frac{n+1}{n} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} X_i\right] = \theta$.

Gæði metils – Bjagi – Meðal-fer-skekkja

Bjaginn er, einn sér, ekki góður mælikvarði á fjarlægð metils D frá stika $\theta \in H$ sem hann á að meta. T.d. eru bæði X_1 og $\bar{X}$ óbjagaðir metlar fyrir μ en $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n \to 0$ þegar n vex meðan $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$.

Góður mælikvarði á fjarlægð metils D frá θ er

$$r_\theta(D) = \mathbf{E}_\theta\big[(D-\theta)^2\big] = \textit{meðalferskekkja } D.$$

Takið eftir að ef $\mathbf{E}_\theta[D] = \theta$ þá er $r_\theta(D) = \mathrm{Var}_\theta[D]$.

Regla: $\quad r_\theta(D) = \mathrm{Var}_\theta[D] + b_\theta(D)^2, \quad \theta \in H.$

Sönnun: Setjum $Y = D - \mathbf{E}_\theta[D]$ og $a = \mathbf{E}_\theta[D] - \theta$.
Fáum $\quad (D-\theta)^2 = (Y+a)^2 = Y^2 + 2aY + a^2$

Nú er $\mathbf{E}_\theta[Y] = 0$ svo

þ.e.
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta[(D-\theta)^2] &= \mathbf{E}_\theta[Y^2] + a^2 \\ r_\theta(D) &= \mathrm{Var}_\theta[D] + b_\theta(D)^2. \end{aligned}$$

Metill D_1 kallast ***skilvirkari*** en metill D_2 ef

$$r_\theta(D_1) \leqslant r_\theta(D_2), \quad \theta \in H.$$

Almennt er ekki til metill D sem er skilvirkastur. Ástæðan er sú að þá væri $r_\theta(D) \leqslant r_\theta(D_c)$ þar sem D_c er metillinn sem tekur bara eitt gildi c og hefur því fervikið 0 þegar $\theta = c$. Af þessu myndi leiða að $r_\theta(D) = 0$ fyrir öll gildi θ. Það gengur ekki nema þegar $\mathbf{P}_\theta(D = \theta) = 1$ þ.e. þegar hægt er að nota úrtakið til að finna óþekkta stikann með 100% líkum.

Stundum er þó til skilvirkasti bjagalausi metillinn.

Samvegnir metlar – Skilvirkni

Regla: Ef D_1 og D_0 eru óbjagaðir metlar fyrir θ þá eru eftirfarandi *samvegnu* metlar líka óbjagaðir

$$D_a = aD_1 + (1-a)D_0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ef D_1 og D_0 eru óháðir þá er skilvirknin mest þegar

$$a = \frac{\mathrm{Var}[D_0]}{\mathrm{Var}[D_1] + \mathrm{Var}[D_0]}$$

þ.e. þegar

$$a = \frac{1/\mathrm{Var}[D_1]}{1/\mathrm{Var}[D_0] + 1/\mathrm{Var}[D_1]}$$

Sönnun: Bjagaleysi D_a fæst svona

$$\mathbf{E}[D_a] = a\mathbf{E}[D_1] + (1-a)\mathbf{E}[D_0] = a\theta + (1-a)\theta = \theta.$$

Bjagaleysið gefur nú að $r_\theta(D_a) = \mathrm{Var}[D_a]$. Til að finna skilvirkasta metilinn þurfum því að finna það a sem lágmarkar $\mathrm{Var}[D_a]$. Óhæði D_1 og D_0 gefur

$$\mathrm{Var}[D_a] = a^2\,\mathrm{Var}[D_1] + (1-a)^2\,\mathrm{Var}[D_0].$$

Þetta er annars stigs margliða í a og lágmarkast þar sem afleiðan er 0:

$$2a\,\mathrm{Var}[D_1] - 2(1-a)\,\mathrm{Var}[D_0] = 0$$

þ.e.

$$a\,\mathrm{Var}[D_1] - \mathrm{Var}[D_0] + a\,\mathrm{Var}[D_0] = 0$$

þ.e.

$$a\,(\mathrm{Var}[D_1] + \mathrm{Var}[D_0]) = \mathrm{Var}[D_0]$$

þ.e.

$$a = \frac{\mathrm{Var}[D_0]}{\mathrm{Var}[D_1] + \mathrm{Var}[D_0]}.$$

Deilum með $\mathrm{Var}[D_1]\mathrm{Var}[D_0]$ uppi á striki og undir:

$$a = \frac{1/\mathrm{Var}[D_1]}{1/\mathrm{Var}[D_0] + 1/\mathrm{Var}[D_1]}$$

Samvegni metillinn $S_{\mathbf{p}}^2$

Regla: Látum S_1^2 og S_2^2 vera úrtaksdreifnir úr tveim óháðum úrtökum (takið eftir að σ^2 er eins í báðum)

$$X_1, \ldots, X_n \text{ úr } \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \quad \text{og} \quad Y_1, \ldots, Y_m \text{ úr } \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2).$$

Skilvirkasti samvegni metillinn fyrir σ^2 er

$$S_{\mathbf{p}}^2 := \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}.$$

Ennfremur

$$\frac{(n+m-2)S_{\mathbf{p}}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Hér á eftir eru $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ óháðar $\mathrm{N}(0,1)$-stærðir.

Sönnun: Samkvæmt reglunni hér fyrir neðan er

$$\mathrm{Var}[S_1^2] = \tfrac{\sigma^4 c}{n-1} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Var}[S_2^2] = \tfrac{\sigma^4 c}{m-1}.$$

Samkvæmt reglunni á síðunni hér næst á undan er því $aS_1^2 + (1-a)S_2^2$ skilvirkastur þegar

$$a = \frac{1/\left(\frac{\sigma^4 c}{n-1}\right)}{1/\left(\frac{\sigma^4 c}{m-1}\right) + 1/\left(\frac{\sigma^4 c}{n-1}\right)} = \frac{n-1}{m-1+n-1}.$$

Þar eð $(n-1)S_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ eins og $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$ og $(m-1)S_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{m-1}$ eins og $Z_n^2 + \ldots + Z_{n+m-2}^2$ þá gefur óhæðið að $(n-1)S_1^2/\sigma^2 + (m-1)S_2^2/\sigma^2$ hefur sömu dreifingu og $Z_1^2 + \ldots + Z_{n+m-2}^2$ þ.e. χ^2_{n+m-2}.

Regla: Ef S^2 er úrtaksdreifni úrtaks úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ þá er $\mathrm{Var}[S^2] = \frac{\sigma^4 c}{n-1}$ þar sem $c = \mathrm{Var}[Z^2]$ (reyndar er $c = 2$)

Sönnun: Þar eð $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$ eins og $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$ fæst $\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \mathrm{Var}[S^2] = (n-1)\mathrm{Var}[Z^2]$ svo $\mathrm{Var}[S^2] = \frac{\sigma^4}{n-1} c$.

BILMAT

Yfirlit yfir myndskeið og efni

Skeið	Lengd	Síður	Efni
T16	16:11	Á töflu	Undirbúningur fyrir BILMAT og TILGÁTUPRÓF
T17	9:37	Töl 20	Öryggisbil Öryggi $(1 - \alpha)100\%$
T18	8:00	Töl 21	Normlegt úrtak σ^2 þekkt Almenn aðferð
T19a	5:03	Töl 22	Normlegt úrtak Bil fyrir μ σ^2 óþekkt
T19b	8:53	Töl 23-24	Normlegt úrtak Bil fyrir σ^2 μ þekkt/óþekkt
T20a	11:42	Töl 25-26	Óháð normleg úrtök Bil fyrir $\mu_x - \mu_y$
T20b	9:05	Töl 27	Óháð normleg úrtök Bil fyrir σ_x^2/σ_y^2
T21	4:38	Töl 28	Lengd öryggisbila
T22	5:23	Töl 29	Bil fyrir úrtak úr Exp
T23a	6:46	Aðalsíða 34	Höfuðmarkgildisreglan Bin og Poi
T23b	7:56	Töl 30	Nálgunarbil Úrtak úr Ber
T23c	4:20	Töl 31	Nálgunarbil Óháð úrtök úr Ber
T24	7=3+4	Töl 32	Nálgunarbil Úrtak úr Poi + um nákvæmni
T25	4:31	Töl 33	Nálgunarbil Stór úrtök

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

T01 fyrsta myndskeið um tölfræði

12:21 12 mínútur og 21 sekúnda

Töl 1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

BILMAT – Öryggisbil – Öryggi $1-\alpha$

Fram að þessu höfum við fengist við að meta θ, og (almennar) $\gamma = g(\theta)$, með einni tölu, t.d. μ með $\bar{x}$.

Nú snúum við okkur að óvissunni í matinu.

Tökum $0 < \alpha < 1$. Látum $A \leqslant B$ vera lýsistærðir og $a \leqslant b$ vera athuguð gildi á þeim.

Ef $\quad \mathbf{P}_\theta(A \leqslant \gamma \leqslant B) = 1 - \alpha \quad$ fyrir öll gildi á θ

kallast bilið $[a,\, b]$ ***tvíhliða bilmat*** á γ með $(1-\alpha)100\%$ ***öryggi***. Og líka $(1-\alpha)100\%$ ***tvíhliða öryggisbil*** fyrir γ.

Skrifum:
$$a \leqslant \gamma \leqslant b \qquad (1-\alpha)100\%$$
eða
$$\gamma \in [a,\, b] \qquad (1-\alpha)100\%$$

Hér á eftir er jafnframt $\mathbf{P}_\theta(\gamma < A) = \mathbf{P}_\theta(\gamma > B) = \alpha/2$.

Ef $\quad \mathbf{P}_\theta(\gamma \geqslant A) = 1 - \alpha \quad$ fyrir öll gildi á θ

kallast bilið $[a,\, \infty)$ ***einhliða efra bilmat*** á γ með $(1-\alpha)100\%$ ***öryggi***. Og líka $(1-\alpha)100\%$ ***einhliða efra öryggisbil*** fyrir γ (með ***neðri öryggismörk*** a). Skrifum:
$$\gamma \geqslant a \qquad (1-\alpha)100\%$$

Ef $\quad \mathbf{P}_\theta(\gamma \leqslant B) = 1 - \alpha \quad$ fyrir öll gildi á θ

kallast bilið $(-\infty,\, b]$ ***einhliða neðra bilmat*** á γ með $(1-\alpha)100\%$ ***öryggi***. Og líka $(1-\alpha)100\%$ ***einhliða neðra öryggisbil*** fyrir γ (með ***efri öryggismörk*** b). Skrifum:
$$\gamma \leqslant b \qquad (1-\alpha)100\%$$

Algengt val á α er $0{,}05 = 5\%$. Þá er öryggið $0{,}95 = 95\%$.

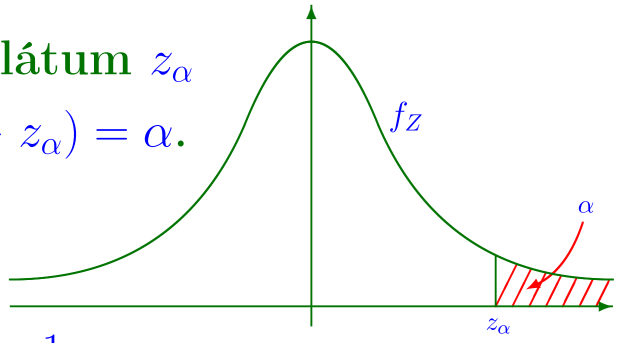
Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ – σ^2 þekkt – $\theta=\gamma=\mu$

Látum $Z\sim \mathrm{N}(0,1)$ og látum z_α vera þannig að $\mathbf{P}(Z>z_\alpha)=\alpha$.

Þá er $\mathbf{P}(Z<-z_\alpha)=\alpha$

og

$\mathbf{P}(-z_{\alpha/2}\leqslant Z\leqslant z_{\alpha/2})=1-\alpha$



Munið að $\dfrac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim \mathrm{N}(0,1)$ svo $\dfrac{\mu-\bar X}{\sigma/\sqrt{n}}\sim \mathrm{N}(0,1)$.

Þetta gefur $\mathbf{P}_\mu\left(-z_{\alpha/2}\leqslant \frac{\mu-\bar X}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$

svo $\mathbf{P}_\mu\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant \mu-\bar X\leqslant z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

svo $\mathbf{P}_\mu\left(\bar X-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant \mu\leqslant \bar X+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

Einnig

$\mathbf{P}_\mu\left(\frac{\mu-\bar X}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant -z_\alpha\right)=1-\alpha$ svo $\mathbf{P}_\mu\left(\mu\geqslant \bar X-z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

Loks

$\mathbf{P}_\mu\left(\frac{\mu-\bar X}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant z_\alpha\right)=1-\alpha$ svo $\mathbf{P}_\mu\left(\mu\leqslant \bar X+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

Tvíhliða:

$$\bar x-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant \mu\leqslant \bar x+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad (1-\alpha)100\%$$

sem oft er skrifað $\mu=\bar x\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad (1-\alpha)100\%$

Efra: $\mu\geqslant \bar x-z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad (1-\alpha)100\%$

Neðra: $\mu\leqslant \bar x+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad (1-\alpha)100\%$

$z_{0,05}=1{,}645\quad z_{0,025}=1{,}960\quad z_{0,01}=2{,}326\quad z_{0,005}=2{,}576$

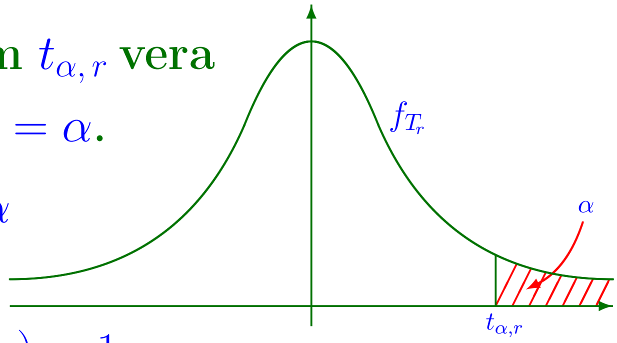
Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ – $\theta = (\mu,\sigma^2)$ – $\gamma = \mu$

Látum $T_r \sim \mathrm{t}_r$ og látum $t_{\alpha,r}$ vera þannig að $\mathbf{P}(T_r > t_{\alpha,r}) = \alpha$.

Þá er $\mathbf{P}(T_r < -t_{\alpha,r}) = \alpha$

og

$$\mathbf{P}(-t_{\alpha/2,r} \leqslant T_r \leqslant t_{\alpha/2,r}) = 1-\alpha$$



Munið að $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$ **svo** $\dfrac{\mu-\bar{X}}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$.

Setjum S í stað σ í útleiðslunni á síðunni hér á undan. Þá fáum við – með $t_{\alpha/2,n-1}$ í stað $z_{\alpha/2}$ – að

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

og – með $t_{\alpha,n-1}$ í stað z_α – að

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\mu \geqslant \bar{X} - t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\mu \leqslant \bar{X} + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha\,.$$

Tvíhliða:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\%$$

sem oft er skrifað $\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\%$

Efra: $\mu \geqslant \bar{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\%$

Neðra: $\mu \leqslant \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\%$

Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – μ þekkt – $\theta = \gamma = \sigma^2$

Látum $Y \sim \chi^2_r$ og látum $\chi^2_{\alpha,\,r}$ vera tölu þannig að

$\mathbf{P}(Y > \chi^2_{\alpha,\,r}) = \alpha.$ Þá er $\mathbf{P}(Y < \chi^2_{1-\alpha,\,r}) = \alpha.$

Nú er $\displaystyle\sum_1^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ (liðir óháðar $\mathrm{N}(0,1)$ í öðru)

Þetta gefur $\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\chi^2_{\alpha/2,n} \geqslant \frac{\sum_1^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{1-\alpha/2,n}\right) = 1-\alpha$
svo

$$\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,n}} \leqslant \frac{\sigma^2}{\sum_1^n (X_i-\mu)^2} \leqslant \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right) = 1-\alpha$$

Einnig $\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_1^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{\alpha,n}\right) = 1-\alpha$ svo

$$\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{\sum_1^n (X_i-\mu)^2} \geqslant \frac{1}{\chi^2_{\alpha,n}}\right) = 1-\alpha$$

Loks $\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_1^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{1-\alpha,n}\right) = 1-\alpha$ svo

$$\mathbf{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{\sum_1^n (X_i-\mu)^2} \leqslant \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha,n}}\right) = 1-\alpha$$

Margföldum með $\sum_1^n (X_i-\mu)^2$ í ójöfnunum og fáum eftirfarandi öryggisbil.

Tvíhliða: $\displaystyle\frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n}}$ $\qquad (1-\alpha)100\%$

Efra: $\displaystyle\sigma^2 \geqslant \frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha,\,n}}$ $\qquad (1-\alpha)100\%$

Neðra: $\displaystyle\sigma^2 \leqslant \frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha,\,n}}$ $\qquad (1-\alpha)100\%$

Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – $\theta = (\mu, \sigma^2)$ – $\gamma = \sigma^2$

Látum $Y \sim \chi^2_r$ og látum $\chi^2_{\alpha,\,r}$ vera tölu þannig að

$\mathbf{P}(Y > \chi^2_{\alpha,\,r}) = \alpha.$ Þá er $\mathbf{P}(Y < \chi^2_{1-\alpha,\,r}) = \alpha.$

Munið að $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}\,.$

Þetta gefur $\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\chi^2_{\alpha/2,n-1} \geqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$ svo

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leqslant \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leqslant \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Einnig $\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{\alpha,n-1}\right) = 1-\alpha$ svo

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \geqslant \frac{1}{\chi^2_{\alpha,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Loks $\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{1-\alpha,n-1}\right) = 1-\alpha$ svo

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leqslant \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Margföldum með $(n-1)S^2$ í ójöfnunum og fáum eftirfarandi öryggisbil.

Tvíhliða: $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}$ $(1-\alpha)100\%$

Efra: $\sigma^2 \geqslant \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,\,n-1}}$ $(1-\alpha)100\%$

Neðra: $\sigma^2 \leqslant \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}}$ $(1-\alpha)100\%$

Óháð N-úrtök – $\sigma_{\mathsf{x}}^2, \sigma_{\mathsf{y}}^2$ þekkt – $\gamma = \mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}$

Skoðum tvö óháð úrtök

$$X_1,\ldots,X_n \text{ úr } \mathrm{N}(\mu_{\mathsf{x}}, \sigma_{\mathsf{x}}^2) \quad \text{og} \quad Y_1,\ldots,Y_m \text{ úr } \mathrm{N}(\mu_{\mathsf{y}}, \sigma_{\mathsf{y}}^2)$$

þar sem σ_{x}^2 og σ_{y}^2 eru þekktir stikar, $\theta = (\mu_{\mathsf{x}}, \mu_{\mathsf{y}})$ óþekkt, og við höfum áhuga á mismuninum $\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}$.

Nú eru $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu_{\mathsf{x}}, \sigma_{\mathsf{x}}^2/n)$ og $\bar{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_{\mathsf{y}}, \sigma_{\mathsf{y}}^2/m)$ óháð svo

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}, \sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m)$$

Þetta gefur

$$\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}}}\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{(\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}) - (\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m}} \leqslant z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Einnig

$$\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}}}\left(\frac{(\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}) - (\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m}} \geqslant -z_{\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

Loks

$$\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}}}\left(\frac{(\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}}) - (\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m}} \leqslant z_{\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

Með samskonar tilfærslum og hér að framan fæst

Tvíhliða:

$$\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}} = \bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Efra:

$$\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}} \geqslant \bar{x} - \bar{y} - z_{\alpha}\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Neðra:

$$\mu_{\mathsf{x}} - \mu_{\mathsf{y}} \leqslant \bar{x} - \bar{y} + z_{\alpha}\sqrt{\sigma_{\mathsf{x}}^2/n + \sigma_{\mathsf{y}}^2/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

$z_{0{,}05} = 1{,}645 \quad z_{0{,}025} = 1{,}960 \quad z_{0{,}01} = 2{,}326 \quad z_{0{,}005} = 2{,}576$

Óháð N-úrtök – $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ – $\gamma = \mu_x - \mu_y$

Úrtökin eru $\mathrm{N}(\mu_x, \sigma^2)$ og $\mathrm{N}(\mu_y, \sigma^2)$ og $\theta = (\mu_x, \mu_y, \sigma^2)$.

Munið að skilvirkasti samvegni metillinn fyrir σ^2 er

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2} \quad \text{og} \quad \frac{(n+m-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Nú er $\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathrm{N}\big(\mu_x - \mu_y,\ \sigma^2\big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\big)\big)$ og óháð S_p^2 svo

$$\frac{(\mu_x - \mu_y) - (\bar{X} - \bar{Y})}{S_p\sqrt{1/n + 1/m}} = \frac{(\mu_x - \mu_y) - (\bar{X} - \bar{Y})}{\sigma\sqrt{1/n + 1/m}} \Big/ \frac{S_p}{\sigma} \sim \mathrm{t}_{n+m-2}.$$

Þetta gefur

$$\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y,\sigma^2}\left(\frac{(\mu_x - \mu_y) - (\bar{X} - \bar{Y})}{S_p\sqrt{1/n + 1/m}} = \pm t_{\alpha/2,\,n+m-2}\right) = 1 - \alpha$$

Einnig

$$\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y,\sigma^2}\left(\frac{(\mu_x - \mu_y) - (\bar{X} - \bar{Y})}{S_p\sqrt{1/n + 1/m}} \geqslant -t_{\alpha,\,n+m-2}\right) = 1 - \alpha$$

Loks

$$\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y,\sigma^2}\left(\frac{(\mu_x - \mu_y) - (\bar{X} - \bar{Y})}{S_p\sqrt{1/n + 1/m}} \leqslant t_{\alpha,\,n+m-2}\right) = 1 - \alpha$$

Með samskonar tilfærslum og hér að framan fæst

Tvíhliða:

$$\mu_x - \mu_y = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,\,n+m-2}\, s_p\sqrt{1/n+1/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Efra:

$$\mu_x - \mu_y \geqslant \bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha,\,n+m-2}\, s_p\sqrt{1/n+1/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Neðra:

$$\mu_x - \mu_y \leqslant \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha,\,n+m-2}\, s_p\sqrt{1/n+1/m} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Óháð N-úrtök – $\theta = (\mu_{\mathsf{x}}, \mu_{\mathsf{y}}, \sigma^2_{\mathsf{x}}, \sigma^2_{\mathsf{y}})$ – $\gamma = \sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Látum V og W vera óháðar, $V \sim \chi^2_r$ og $W \sim \chi^2_s$.
Dreifing $F_{r,s} = \dfrac{V/r}{W/s}$ kallast $\mathrm{F}_{r,s}$-***dreifing***.

Slembistærð R með $\mathrm{F}_{r,s}$-dreifingu kallast $\mathrm{F}_{r,s}$-***stærð*** eða F-***stærð*** með r og s ***frígráður***. Skrifum $R \sim \mathrm{F}_{r,s}$.
Látum $F_{\alpha,r,s}$ vera tölu þannig að $\mathbf{P}(F_{r,s} > F_{\alpha,r,s}) = \alpha$.

Nú eru $(n-1)S^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{x}} \sim \chi^2_{n-1}$ og $(m-1)S^2_{\mathsf{y}}/\sigma^2_{\mathsf{y}} \sim \chi^2_{m-1}$ óháðar svo

$$\frac{S^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{x}}}{S^2_{\mathsf{y}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}} \sim \mathrm{F}_{n-1,m-1} \quad \text{svo} \quad \frac{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}}{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}} \sim \mathrm{F}_{n-1,m-1}.$$

Þetta gefur (með $\alpha/2$ í stað α, $r = n-1$ og $s = m-1$)

$$\mathbf{P}_\theta\left(F_{\alpha/2,n-1,m-1} \geqslant \frac{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}}{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}} \geqslant F_{1-\alpha/2,n-1,m-1}\right) = 1-\alpha$$

svo

$$\mathbf{P}_\theta\left(\frac{1}{F_{\alpha/2,n-1,m-1}} \leqslant \frac{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}}{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}} \leqslant \frac{1}{F_{1-\alpha/2,n-1,m-1}}\right) = 1-\alpha$$

Einnig

$$\mathbf{P}_\theta\left(\frac{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}}{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}} \geqslant \frac{1}{F_{\alpha,n-1,m-1}}\right) = 1-\alpha$$

Loks

$$\mathbf{P}_\theta\left(\frac{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}}{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}} \leqslant \frac{1}{F_{1-\alpha,n-1,m-1}}\right) = 1-\alpha$$

Margföldum með S^2_x/S^2_y í ójöfnunum og fáum

Tvíhliða:

$$\frac{s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}}{F_{\alpha/2,n-1,m-1}} \leqslant \sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}} \leqslant \frac{s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}}{F_{1-\alpha/2,n-1,m-1}} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Efra:

$$\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}} \geqslant \frac{s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}}{F_{\alpha,n-1,m-1}} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Neðra:

$$\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}} \leqslant \frac{s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}}{F_{1-\alpha,n-1,m-1}} \qquad (1-\alpha)100\%$$

(Takið eftir að $1/F_{s,r} \sim \mathrm{F}_{r,s}$ svo $F_{1-\alpha,r,s} = 1/F_{\alpha,s,r}$)

Lengd öryggisbila – Forkönnun

Skoðum aftur úrtak $X_1, \ldots, X_n$ úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Þegar σ^2 er þekkt fengum við eftirfarandi tvíhliða öryggisbil

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\% .$$

Lengd þess er $2\, z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Ef við viljum að lengdin sé ekki meiri en fyrirfram gefin tala l getum við valið stærð úrtaksins n þannig að $2\, z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant l$ þ.e.

$$n \geqslant \frac{4\, z_{\alpha/2}^2\, \sigma^2}{l^2}$$

Takið eftir að ef við viljum helmingi styttra bil, $l/2$, þá dugar ekki að tvöfalda stærðina. Það þarf að fjórfalda hana, $4n$. Stærð úrtaksins er í öfugu hlutafalli við lengdina í öðru. Það er vaxandi erfiðleikum bundið að bæta nákvæmnina í matinu.

Þegar σ^2 er ekki þekkt fengum við

$$\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1-\alpha)100\%.$$

Lengdin er $2\, t_{\alpha/2,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$ og hún liggur ekki fyrir fyrr en við erum búin að fá athugaða úrtakið. Lengdin ákvarðast af lýsitölunni s sem er fall af úrtakinu.

Við þessu er hægt að bregðast með því að gera forkönnun. Tökum lítið úrtak og reiknum út dreifni þess, köllum hana r^2. Veljum svo n t.d.

$$n \geqslant \frac{4\, z_{\alpha/2}^2\, r^2}{l^2} .$$

Úrtak úr $\mathrm{Exp}(\lambda)$ – $\gamma = \lambda$, $\gamma = F_\lambda(x)$, $\gamma = \mu$

Öll öryggisbil sem við höfum leitt út hingað til byggja á normlegum úrtökum. Skoðum nú úrtak

$$X_1, \ldots, X_n \quad \text{úr} \quad \mathrm{Exp}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$$

Notum eftirfarandi reglu (fæst eftir smá tegrunar og diffrunar umstang)

$$2\,\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$$

Þetta gefur $\mathbf{P}\big(\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n} \leqslant 2\,\lambda \sum_i X_i \leqslant \chi^2_{\alpha/2,\,2n}\big) = 1-\alpha$

$$\mathbf{P}\big(2\,\lambda \textstyle\sum_i X_i \geqslant \chi^2_{1-\alpha,\,2n}\big) = 1-\alpha$$

$$\mathbf{P}\big(2\,\lambda \textstyle\sum_i X_i \leqslant \chi^2_{\alpha,\,2n}\big) = 1-\alpha$$

Deilum með $2\sum_i X_i$ í ójöfnunum og fáum

Tvíhliða: $\dfrac{\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n}}{2\sum_i x_i} \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\chi^2_{\alpha/2,\,2n}}{2\sum_i x_i}$ $\quad(1-\alpha)100\%$

Efra: $\lambda \geqslant \dfrac{\chi^2_{1-\alpha,\,2n}}{2\sum_i x_i}$ $\quad(1-\alpha)100\%$

Neðra: $\lambda \leqslant \dfrac{\chi^2_{\alpha,\,2n}}{2\sum_i x_i}$ $\quad(1-\alpha)100\%$

Fyrir $x > 0$ er $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ sem vex með λ svo t.d.

$$1 - e^{-\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n}}{2\sum_i x_i}\,x} \leqslant F_\lambda(x) \leqslant 1 - e^{-\frac{\chi^2_{\alpha/2,\,2n}}{2\sum_i x_i}\,x} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Hinsvegar minnkar $\mu = \mathbf{E}_\lambda[X] = 1/\lambda$ þegar λ vex svo

$$\frac{2\sum_i x_i}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,2n}} \geqslant \mu \geqslant \frac{2\sum_i x_i}{\chi^2_{\alpha/2,\,2n}} \qquad (1-\alpha)100\%$$

Takið eftir að ójöfnurnar hafa snúist við.

Bil fyrir tvö óháð úrtök fást eins og hér að framan.

Nálgunarbil – Úrtak úr $\mathrm{Ber}(p)$ – $\gamma = p$

Skoðum úrtak úr $\mathrm{Ber}(p)$. Þá er $\mu = p$ og $\sigma^2 = p(1-p)$. Höfuðmarkgildisreglan gefur að

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt}$$

og Lögmál mikils fjölda gefur að

$$p \approx \bar{X} \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Saman gefur þetta að

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Athugasemd: Hve stórt n þarf að vera, fer eftir því hve mikillar nákvæmni verkefnið, sem unnið er að, krefst. Rétt er að hafa allavega í huga puttaregluna $np(1-p) \geqslant 10$ og þá sér í lagi hvort hægt er að treysta því að p sé ekki allt of nálægt 0 og 1.

Nálgunin hér að ofan gefur nú að fyrir stór n

$$\mathbf{P}_p\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{p-\bar{X}}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}} \leqslant z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\mathbf{P}_p\left(\frac{p-\bar{X}}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}} \geqslant -z_\alpha\right) \approx 1-\alpha \approx \mathbf{P}_p\left(\frac{p-\bar{X}}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}} \leqslant z_\alpha\right).$$

Fyrir stór n fæst með samskonar tilfærslum og áður

Tvíhliða: $p = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} \qquad \approx(1-\alpha)100\%$

Efra: $p \geqslant \bar{x} - z_\alpha \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} \qquad \approx(1-\alpha)100\%$

Neðra: $p \leqslant \bar{x} + z_\alpha \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})/n} \qquad \approx(1-\alpha)100\%$

Óháð úrtök úr $\mathrm{Ber}(p)$ og $\mathrm{Ber}(q)$ – $\gamma = p - q$

Við beitum nú nálguninni á síðunni hér á undan (sjá líka athugasemd þar) á tvö óháð úrtök

$$X_1, \ldots, X_n \text{ úr } \mathrm{Ber}(p) \quad \text{og} \quad Y_1, \ldots, Y_m \text{ úr } \mathrm{Ber}(q).$$

Þegar n og m eru stór gefur Höfuðmarkgildisreglan að

$$\bar{X} - \bar{Y} \approx \mathrm{N}\left(p - q,\ \frac{p(1-p)}{n} + \frac{q(1-q)}{m}\right)$$

og Lögmál mikils fjölda að

$$p \approx \bar{X} \quad \text{og} \quad q \approx \bar{Y}.$$

Saman gefur þetta að þegar n og m eru stór þá er

$$\frac{(p-q) - (\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n + \bar{Y}(1-\bar{Y})/m}} \approx \mathrm{N}(0,1).$$

Förum að eins og á síðunni hér á undan með $p-q$ í stað p, $\bar{X}-\bar{Y}$ í stað $\bar{X}$, og $\bar{X}(1-\bar{X})/n + \bar{Y}(1-\bar{Y})/m$ í stað $\bar{X}(1-\bar{X})/n$ og fáum eftirfarandi nálgunarbil.

Tvíhliða:

$$p - q = \bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}} \qquad \approx (1-\alpha)100\%$$

Efra:

$$p - q \geqslant \bar{x} - \bar{y} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}} \qquad \approx (1-\alpha)100\%$$

Neðra:

$$p - q \leqslant \bar{x} - \bar{y} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}} \qquad \approx (1-\alpha)100\%$$

Nálgunarbil – Úrtak úr $\mathrm{Poi}(\lambda)$ – $\gamma = \lambda$

Skoðum nú úrtak úr $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Þá er $\mu = \lambda$ og $\sigma^2 = \lambda$.
Höfuðmarkgildisreglan gefur að

$$\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt}$$

og Lögmál mikils fjölda gefur að

$$\lambda \approx \bar{X} \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Saman gefur þetta að

$$\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\bar{X}/n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Nálgunin hér að ofan gefur nú að fyrir stór n

$$\mathbf{P}_\lambda\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\lambda - \bar{X}}{\sqrt{\bar{X}/n}} \leqslant z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \qquad (*)$$

$$\mathbf{P}_\lambda\left(\frac{\lambda - \bar{X}}{\sqrt{\bar{X}/n}} \geqslant -z_\alpha\right) \approx 1 - \alpha \approx \mathbf{P}_\lambda\left(\frac{\lambda - \bar{X}}{\sqrt{\bar{X}/n}} \leqslant z_\alpha\right).$$

Fyrir stór n fæst með samskonar tilfærslum og áður

Tvíhliða: $\lambda = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{x}/n}$ $\approx(1-\alpha)100\%$

Efra: $\lambda \geqslant \bar{x} - z_\alpha \sqrt{\bar{x}/n}$ $\approx(1-\alpha)100\%$

Neðra: $\lambda \leqslant \bar{x} + z_\alpha \sqrt{\bar{x}/n}$ $\approx(1-\alpha)100\%$

Tafla: Réttar líkur í $(*)$ þegar $(1-\alpha)100\% = 95\%$.

nokkur tilvik	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 5$
$n = 10$	63%	93%	95%
$n = 30$	80%	93%	95%
$n = 100$	93%	94%	95%

Nálgunarbil – Stór úrtök

Nálganirnar á síðunum hér næst á undan fyrir úrtök úr $\mathrm{Ber}(p)$ og $\mathrm{Poi}(\lambda)$ krefjast þess að p sé ekki of nálægt 0 eða 1 og að λ (sjá töflu) sé ekki of nálægt 0. Algengar puttareglur eru $np(1-p) \geqslant 10$ og $n\lambda \geqslant 10$.

Skoðum nú úrtak $X_1,\dots,X_n$ úr óþekktri dreifingu F. Höfuðmarkgildisreglan gefur að

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Af Lögmáli mikils fjölda leiðir (auðveldlega) að

$$\sigma^2 \approx S^2 \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Saman gefur þetta að

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Hve stórt n þarf að vera, fer eftir því hver óþekkta dreifingin F er. Ef þær dreifingar sem til greina koma eru þannig að nálgunin er góð fyrir þær allar samtímis (þ.e. með sama n fyrir þær allar) þá má nota þessa nálgun til að mynda nálgunarbil.

Sama útleiðsla og fyrir N-úrtak þegar σ^2 er þekkt:

Tvíhliða:	$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\approx(1-\alpha)100\%$
Efra:	$\mu \geqslant \bar{x} - z_{\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\approx(1-\alpha)100\%$
Neðra:	$\mu \leqslant \bar{x} + z_{\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$	$\approx(1-\alpha)100\%$

Algeng gróf puttaregla er $n \geqslant 30$. En ef mikið er í húfi er hægt (auk dýpri stærðfræðilegrar athugunar) að styðjast við forkannanir og hermiaðferðir.

TILGÁTUPRÓF

Yfirlit yfir myndskeið og efni

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

T01 fyrsta myndskeið um tölfræði

12:21 12 mínútur og 21 sekúnda

Töl 1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

TILGÁTUPRÓF – H_0 og H_1 – Krafa α

Látum (eins og áður) $X_1, \ldots, X_n$ vera úrtak úr F_θ og $x_1, \ldots, x_n$ vera athugað úrtak. Tökum $0 < \alpha < 1$. Látum H_0 og H_1 vera sundurlæg mengi af mögulegum gildum á stikanum θ.

Til að kanna hvort afgerandi ástæða sé til að efast um að θ sé í H_0 (en ekki í H_1) er sett fram ***núlltilgáta***

$$\mathrm{H}_0 : \quad \theta \in H_0$$

og styllt gegn henni ***gagntilgátu***

$$\mathrm{H}_1 : \quad \theta \in H_1$$

Ef H_0 er í of miklu ósamræmi við athugaða úrtakið $x_1,\ldots, x_n$ (miðað við hvað H_1 samræmist því vel) þá er H_0 hafnað. Þetta er oft gert (eins og í dæmunum hér á eftir) með því að nota lýsistærð – ***prófstærð*** –

$$D = d(X_1, \ldots, X_n) \text{ sem er þannig}$$

að há eða lág gildi á D eru líklegri ef H_1 er sönn.

Tilgátupróf: Veljum ***kröfu*** (eða ***marktektarkröfu***) α og ***höfnunarmörk*** $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ þannig að

$$\mathbf{P}_\theta\big(D \notin [a, b]\big) \leqslant \alpha, \quad \theta \in H_0. \qquad *$$

Þá er H_0 ***hafnað*** með ***kröfu*** α ef

$$d(x_1, \ldots, x_n) \notin [a, b]$$

og annars er H_0 ***ekki hafnað*** með ***kröfu*** α.

Athugasemd: Tilgátupróf líkist þeirri réttarreglu að sakborningur er saklaus (H_0) nema sýnt sé fram á með sönnunargögnum ($d(x_1, \ldots, x_n) \notin [a, b]$) að sekt (H_1) sé hafin yfir skynsamlegan vafa ($*$).

N-próf: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ úrtak, σ^2 þekkt, $\theta = \gamma = \mu$

Munið að $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ og $\mathbf{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$

Látum μ_0 vera eitthvert tiltekið gildi á μ, t.d. $\mu_0 = 0$

Notum prófstærðina $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ sem er $\mathrm{N}(0,1)$ ef $\mu = \mu_0$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0 : \ \mu = \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \ \mu \neq \mu_0$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu \neq \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

Tvíhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0 : \ \mu = \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \ \mu > \mu_0$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu > \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha}\right) = \alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0 : \ \mu \leqslant \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \ \mu > \mu_0$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0 : \ \mu = \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \ \mu < \mu_0$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu < \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha}\right) = \alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0 : \ \mu \geqslant \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \ \mu < \mu_0$

---

t-próf: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ úrtak, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\gamma = \mu$

Munið að $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ og $\mathbf{P}(T > t_{\alpha,\, n-1}) = \alpha$

Látum μ_0 vera eitthvert tiltekið gildi á μ, t.d. $\mu_0 = 0$

Notum prófstærðina $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ sem er t_{n-1} ef $\mu = \mu_0$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu \neq \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\left| \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{\alpha/2,\, n-1} \right) = \alpha$$

Tvíhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| > t_{\alpha/2,\, n-1}$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu > \mu_0$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu > \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha,\, n-1} \right) = \alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,\, n-1}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \ \mu \leqslant \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu > \mu_0$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu < \mu_0$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ eru líklegri ef $\mu < \mu_0$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{\alpha,\, n-1} \right) = \alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha,\, n-1}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \ \mu \geqslant \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu < \mu_0$

Parað t-próf

Algengt er að t-próf sé notað þegar mælingar eru gerðar fyrir og eftir 'meðhöndlun' til að kanna hvort meðhöndlunin hafi áhrif. T.d. ef nýtt lyf við háum blóðþrýstingi er í rannsókn þá er blóðþrýstingur n sjúklinga mældur fyrir og eftir lyfjagjöf. Þannig fást mælingar (v_i fyrir meðhöndlun og w_i eftir)

$$(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$$

sem litið er á sem athuganir á óháðum pörum

$$(V_1, W_1), \ldots, (V_n, W_n)$$

þar sem mismunurinn $X_i = V_i - W_i$ er $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ og σ^2 er óþekkt. Athugað gildi á X_i er $x_i = v_i - w_i$.

Við erum þá komin með slembiúrtak

$$X_1, \ldots, X_n$$

úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ og athugað úrtak

$$x_1, \ldots, x_n.$$

Þar eð σ^2 er óþekkt er hægt að nota t-próf af síðunni hér næst á undan til að prófa hvort meðhöndlunin hafi áhrif.

Í háþrýstingsdæminu myndum við prófa hvort lyfið hafi áhrif til lækkunar: hvort $\mu = \mathbf{E}[V_i] - \mathbf{E}[W_i] > 0$.

Tilgáturnar eru þá $\mathrm{H}_0: \ \mu \leqslant 0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu > 0$

Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$\frac{\bar{x}}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha, n-1}$$

χ^2-próf: $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ úrtak, μ þekkt, $\theta=\gamma=\sigma^2$

Munið að $Y=\sum_1^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ og $\mathbf{P}(Y>\chi^2_{\alpha,n})=\alpha$

Látum σ_0^2 vera eitthvert tiltekið gildi á σ^2, t.d. $\sigma_0^2=1$

Notum prófstærðina $\sum_1^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ sem er χ^2_n ef $\sigma^2=\sigma_0^2$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2\neq\sigma_0^2$

Há eða lág gildi á $\sum\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2\neq\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{(1-\alpha/2),n} \text{ eða } \frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2,n}\right)=\alpha$$

Tvíhliða próf er því: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{(1-\alpha/2),n} \text{ eða } \frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2,n}$$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2>\sigma_0^2$

Há gildi á $\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2>\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha,n}\right)=\alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha,n}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2>\sigma_0^2$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2<\sigma_0^2$

Lág gildi á $\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2<\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha,n}\right)=\alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha,n}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \sigma\geqslant\sigma_0$ og $\mathrm{H}_1: \quad \sigma^2<\sigma_0^2$

χ^2-próf: $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ úrtak, $\theta=(\mu,\sigma^2)$, $\gamma=\sigma^2$

Munið að $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$ og $\mathbf{P}(Y>\chi^2_{\alpha,\,n-1})=\alpha$

Látum σ_0^2 vera eitthvert tiltekið gildi á σ^2, t.d. $\sigma_0^2=1$

Notum prófstærðina $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ sem er χ^2_{n-1} ef $\sigma^2=\sigma_0^2$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$

Há eða lág gildi á $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2\neq\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{(1-\alpha/2),\,n-1}\ \text{eða}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}\right)=\alpha$$

Tvíhliða próf er því: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{(1-\alpha/2),\,n-1}\quad\text{eða}\quad\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}$$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$

Há gildi á $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2>\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha,\,n-1}\right)=\alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\quad\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha,\,n-1}$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2$ og $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2<\sigma_0^2$

Lág gildi á $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ eru líklegri ef $\sigma^2<\sigma_0^2$. Nú er

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}\right)=\alpha$$

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\quad\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma\geqslant\sigma_0$ og $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2<\sigma_0^2$

Óháð N-úrtök – σ_x^2, σ_y^2 þekkt – $H_0: \mu_x = \mu_y$

Munið að $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y,\ \sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m)$. Notum prófstærðina $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}$ sem er $N(0,1)$ ef $\mu_x = \mu_y$.

Tilgátur $\quad H_0: \ \mu_x = \mu_y \quad$ og $\quad H_1: \ \mu_x \neq \mu_y$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}$ eru líklegri ef $\mu_x \neq \mu_y$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y}\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$ ef $\mu_x = \mu_y$.

Tvíhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}\right| > z_{\alpha/2}$$

Tilgátur $\quad H_0: \ \mu_x = \mu_y \quad$ og $\quad H_1: \ \mu_x > \mu_y$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}$ eru líklegri ef $\mu_x > \mu_y$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y}\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}} > z_{\alpha}\right) = \alpha$ ef $\mu_x = \mu_y$.

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}} > z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\quad H_0: \ \mu_x \leqslant \mu_y \quad$ og $\quad H_1: \ \mu_x > \mu_y$

Tilgátur $\quad H_0: \ \mu_x = \mu_y \quad$ og $\quad H_1: \ \mu_x < \mu_y$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}$ eru líklegri ef $\mu_x < \mu_y$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_x,\mu_y}\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}} < -z_{\alpha}\right) = \alpha$ ef $\mu_x = \mu_y$.

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef
$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}} < -z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\quad H_0: \ \mu_x \geqslant \mu_y \quad$ og $\quad H_1: \ \mu_x < \mu_y$

Óháð N-úrtök – $\sigma_{\mathsf{x}}^2 = \sigma_{\mathsf{y}}^2 = \sigma^2$ – $\mathrm{H}_0: \mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$

Munið að $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_{\mathsf{x}}-\mu_{\mathsf{y}})}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}} \sim \mathrm{t}_{n+m-2}$ þegar $\sigma_{\mathsf{x}}^2 = \sigma_{\mathsf{y}}^2 = \sigma^2$.

Prófstærðin $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}$ er því t_{n+m-2} ef $\mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$.

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$ og $\mathrm{H}_1: \quad \mu_{\mathsf{x}} \neq \mu_{\mathsf{y}}$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}$ eru líklegri ef $\mu_{\mathsf{x}} \neq \mu_{\mathsf{y}}$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}},\sigma^2}\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}\right| > t_{\alpha/2,n+m-2}\right) = \alpha$ ef $\mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$.

Tvíhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}\right| > t_{\alpha/2,n+m-2}$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$ og $\mathrm{H}_1: \quad \mu_{\mathsf{x}} > \mu_{\mathsf{y}}$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}$ eru líklegri ef $\mu_{\mathsf{x}} > \mu_{\mathsf{y}}$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}},\sigma^2}\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}} > t_{\alpha,n+m-2}\right) = \alpha$ ef $\mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$.

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}} > t_{\alpha,n+m-2}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \mu_{\mathsf{x}} \leqslant \mu_{\mathsf{y}}$ og $\mathrm{H}_1: \quad \mu_{\mathsf{x}} > \mu_{\mathsf{y}}$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$ og $\mathrm{H}_1: \quad \mu_{\mathsf{x}} < \mu_{\mathsf{y}}$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}}$ eru líklegri ef $\mu_{\mathsf{x}} < \mu_{\mathsf{y}}$.

Nú er $\mathbf{P}_{\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}},\sigma^2}\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}} < -t_{\alpha,n+m-2}\right) = \alpha$ ef $\mu_{\mathsf{x}} = \mu_{\mathsf{y}}$.

Einhliða próf er því:
Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_{\mathbf{p}}\sqrt{1/n+1/m}} < -t_{\alpha,n+m-2}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \mu_{\mathsf{x}} \geqslant \mu_{\mathsf{y}}$ og $\mathrm{H}_1: \quad \mu_{\mathsf{x}} < \mu_{\mathsf{y}}$

Óháð N-úrtök – $\theta=(\mu_{\mathsf{x}},\mu_{\mathsf{y}},\sigma^2_{\mathsf{x}},\sigma^2_{\mathsf{y}})$ – $\mathrm{H}_0:\sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Munið að $\frac{S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}}{\sigma^2_{\mathsf{x}}/\sigma^2_{\mathsf{y}}}\sim \mathrm{F}_{n-1,m-1}$ fyrir óháð normleg úrtök.
Notum prófstærðina $S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}$ sem er $\mathrm{F}_{n-1,m-1}$ ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$.

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ **og** $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}\neq\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Há eða lág gildi á $S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}$ líklegri ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}\neq\sigma^2_{\mathsf{y}}$. Ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ er $\mathbf{P}_\theta\big(S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}<F_{1-\alpha/2,n-1,m-1}$ eða $S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}>F_{\alpha/2,n-1,m-1}\big)=\alpha$.

Tvíhliða próf er því: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}<F_{1-\alpha/2,n-1,m-1} \quad \text{eða} \quad s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}>F_{\alpha/2,n-1,m-1}$$

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ **og** $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}>\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Há gildi á $S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}$ eru líklegri ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}>\sigma^2_{\mathsf{y}}$.
Ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ þá er $\mathbf{P}_\theta\big(S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}>F_{\alpha,n-1,m-1}\big)=\alpha$.

Einhliða próf er því: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}>F_{\alpha,n-1,m-1}$$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}\leqslant\sigma^2_{\mathsf{y}}$ **og** $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}>\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ **og** $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}<\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Lág gildi á $S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}$ eru líklegri ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}<\sigma^2_{\mathsf{y}}$.
Ef $\sigma^2_{\mathsf{x}}=\sigma^2_{\mathsf{y}}$ þá er $\mathbf{P}_\theta\big(S^2_{\mathsf{x}}/S^2_{\mathsf{y}}<F_{1-\alpha,n-1,m-1}\big)=\alpha$.

Einhliða próf er því: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$s^2_{\mathsf{x}}/s^2_{\mathsf{y}}<F_{1-\alpha,n-1,m-1}$$

Sama próf fyrir $\quad \mathrm{H}_0:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}\geqslant\sigma^2_{\mathsf{y}}$ **og** $\mathrm{H}_1:\ \sigma^2_{\mathsf{x}}<\sigma^2_{\mathsf{y}}$

Úrtak úr $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. – $\mathrm{H}_0: \lambda = \lambda_0$

Munið að fyrir úrtak úr $\mathrm{Exp}(\lambda)$ **er** $2\,\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.
Látum λ_0 **vera eitthvert tiltekið gildi á** λ.
Notum prófstærðina $2\lambda_0 \sum_1^n X_i$ **sem er** χ^2_{2n} **ef** $\lambda = \lambda_0$.

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \lambda = \lambda_0$ **og** $\mathrm{H}_1: \quad \lambda \neq \lambda_0$

Há eða lág gildi á $2\lambda_0 \sum_1^n X_i$ **eru líklegri ef** $\lambda \neq \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\Big(2\lambda_0 \sum_1^n X_i < \chi^2_{1-\alpha/2,\,2n}$ **eða** $> \chi^2_{\alpha/2,\,2n}\Big) = \alpha$.

Tvíhliða próf er því: Höfnum H_0 **með kröfu** α **ef**

$$2\lambda_0 \sum_1^n x_i < \chi^2_{1-\alpha/2,\,2n} \quad \text{eða} \quad 2\lambda_0 \sum_1^n x_i > \chi^2_{\alpha/2,\,2n}$$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \lambda = \lambda_0$ **og** $\mathrm{H}_1: \quad \lambda > \lambda_0$

Lág gildi á $2\lambda_0 \sum_1^n X_i$ **eru líklegri ef** $\lambda > \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\Big(2\lambda_0 \sum_1^n X_i < \chi^2_{1-\alpha,\,2n}\Big) = \alpha$.

Einhliða próf er því: Höfnum H_0 **með kröfu** α **ef**

$$2\lambda_0 \sum_1^n x_i < \chi^2_{1-\alpha,\,2n}$$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \lambda \leqslant \lambda_0$ **og** $\mathrm{H}_1: \quad \lambda > \lambda_0$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \quad \lambda = \lambda_0$ **og** $\mathrm{H}_1: \quad \lambda < \lambda_0$

Há gildi á $2\lambda_0 \sum_1^n X_i$ **eru líklegri ef** $\lambda < \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\Big(2\lambda_0 \sum_1^n X_i > \chi^2_{\alpha,\,2n}\Big) = \alpha$.

Einhliða próf er því: Höfnum H_0 **með kröfu** α **ef**

$$2\lambda_0 \sum_1^n x_i > \chi^2_{\alpha,\,2n}$$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0: \quad \lambda \geqslant \lambda_0$ **og** $\mathrm{H}_1: \quad \lambda < \lambda_0$

Nálgunarpróf – Úrtak úr $\mathrm{Ber}(p)$ – $\mathrm{H}_0 : p = p_0$

Látum p_0 vera eitthvert tiltekið gildi á p, t.d. $p_0 = \frac{1}{2}$.
Látum n vera stórt (puttareglan er $np_0(1-p_0) \geqslant 10$)
og munið að þá er $\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \approx \mathrm{N}(0,1)$ ef $p = p_0$.

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \ p = p_0$ **og** $\mathrm{H}_1 : \ p \neq p_0$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ eru líklegri ef $p \neq p_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{p_0}\left(\left|\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$.

Tvíhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef $\left|\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| > z_{\alpha/2}$

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \ p = p_0$ **og** $\mathrm{H}_1 : \ p > p_0$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ eru líklegri ef $p > p_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{p_0}\left(\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha}\right) \approx \alpha$.

Einhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef $\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_{\alpha}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0 : \ p \leqslant p_0$ **og** $\mathrm{H}_1 : \ p > p_0$

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \ p = p_0$ **og** $\mathrm{H}_1 : \ p < p_0$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ eru líklegri ef $p < p_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{p_0}\left(\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}} < -z_{\alpha}\right) \approx \alpha$.

Einhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef $\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} < -z_{\alpha}$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0 : \ p \geqslant p_0$ **og** $\mathrm{H}_1 : \ p < p_0$

Óháð úrtök úr $\mathrm{Ber}(p)$ og $\mathrm{Ber}(q)$ – $\mathrm{H}_0 : p = q$

Skoðum nú tvö óháð úrtök

$$X_1, \ldots, X_n \text{ úr } \mathrm{Ber}(p) \quad \text{og} \quad Y_1, \ldots, Y_m \text{ úr } \mathrm{Ber}(q).$$

Látum n og m vera stór og munið að þá er

$$\bar{X} \approx \mathrm{N}(p, p(1-p)/n) \quad \text{og} \quad \bar{Y} \approx \mathrm{N}(q, q(1-q)/m)$$

Ef $p = q$, gefur þetta (ásamt óhæði og stöðlun) að

$$(\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{p(1-p)(1/n + 1/m)} \approx \mathrm{N}(0,1)$$

Setjum $V = (X_1 + \ldots X_n + Y_1 + \ldots Y_m)/(n+m)$.

Ef $p = q$, gefur Lögmál mikils fjölda að $V \approx p$. Þetta tvennt gefur

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{V(1-V)(1/n + 1/m)}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{ef} \quad p = q.$$

Förum að eins og á síðunni hér á undan og fáum eftirfarandi nálgunarpróf, með v athugað gildi á V.

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0 : \quad p = q \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \quad p \neq q$

Tvíhliða: Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef
$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{v(1-v)(1/n + 1/m)}} \right| > z_{\alpha/2}$$

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0 : \quad p = q \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \quad p > q$

Einhliða: Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef
$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{v(1-v)(1/n + 1/m)}} > z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\qquad \mathrm{H}_0 : \quad p \leqslant q \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \quad p > q$

Tilgátur $\qquad \mathrm{H}_0 : \quad p = q \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \quad p < q$

Einhliða: Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef
$$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{v(1-v)(1/n + 1/m)}} < -z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\qquad \mathrm{H}_0 : \quad p \geqslant q \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1 : \quad p < q$

Nálgunarpróf – Úrtak úr $\mathrm{Poi}(\lambda)$ – $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$

Látum λ_0 vera eitthvert tiltekið gildi á λ.
Látum n vera stórt (ein puttareglan er $n\lambda_0 \geqslant 10$)
og munið að þá er $\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \approx \mathrm{N}(0,1)$ ef $\lambda = \lambda_0$.

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ og $\mathrm{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$

Há eða lág gildi á $\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}$ eru líklegri ef $\lambda \neq \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\left(\left|\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$.

Tvíhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef

$$\left|\frac{\bar{x}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}\right| > z_{\alpha/2}$$

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ og $\mathrm{H}_1 : \lambda > \lambda_0$

Há gildi á $\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}$ eru líklegri ef $\lambda > \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\left(\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} > z_{\alpha}\right) \approx \alpha$.

Einhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef

$$\frac{\bar{x}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} > z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0 : \lambda \leqslant \lambda_0$ og $\mathrm{H}_1 : \lambda > \lambda_0$

Tilgátur $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ og $\mathrm{H}_1 : \lambda < \lambda_0$

Lág gildi á $\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}}$ eru líklegri ef $\lambda < \lambda_0$.

Nú er $\mathbf{P}_{\lambda_0}\left(\frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} < -z_{\alpha}\right) \approx \alpha$.

Einhliða nálgunarpróf er því:
Höfnum H_0 með kröfu $\approx\alpha$ ef

$$\frac{\bar{x}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} < -z_{\alpha}$$

Sama próf fyrir $\mathrm{H}_0 : \lambda \geqslant \lambda_0$ og $\mathrm{H}_1 : \lambda < \lambda_0$

Nálgunarpróf – Stór úrtök

Skoðum nú úrtak $X_1,\ldots,X_n$ úr óþekktri dreifingu F.

Á lokasíðunni í umfjöluninni um bilmat kom fram að samkvæmt Höfuðmarkgildissetningunni og Lögmáli mikils fjölda gildir að

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \approx \mathrm{N}(0,1) \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Hve stórt n þarf að vera til að nálgunin sé góð, fer eftir því hver óþekkta dreifingin F er. Algeng gróf puttaregla er $n \geqslant 30$. En ef mikið er í húfi (eins og þróun bóluefnis) þarf að stíga varlega til jarðar.

Ef þær dreifingar sem koma til greina eru þannig að nálgunin er góð fyrir þær allar samtímis (þ.e. með sama n fyrir þær allar) þá má nota þessa nálgun til að mynda nálgunarpróf þegar n er stórt:

Látum μ_0 vera eitthvert tiltekið gildi á μ, t.d. $\mu_0 = 0$
Notum prófstærðina $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ sem er $\approx \mathrm{N}(0,1)$ ef $\mu = \mu_0$
Förum eins að og á annarri síðu um tilgátupróf:

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0$ og $\mathrm{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \leqslant \mu_0$) og $\mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$

Tilgátur $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \geqslant \mu_0$) og $\mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu $\approx \alpha$ ef $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$

Villur af gerð I og II

Í tilgátuprófum koma upp tvennskonar villur:
Villa af gerð I er að hafna H_0 þegar hún er sönn – kallast líka höfnunarvilla eða höfnunarmistök.
Villa af gerð II er að hafna ekki H_0 þegar hún er röng – kallast líka fastheldnisvilla eða fastheldnismistök.

TILGÁTUPRÓF	H_0 sönn	H_0 röng
H_0 ekki hafnað	rétt	Villa af gerð II
H_0 hafnað	Villa af gerð I	rétt

Villu af gerð I er haldið í skefjum með marktektar-kröfunni α,

$$\mathbf{P}_\theta(D \notin [a_\alpha, b_\alpha]) \leqslant \alpha, \quad \theta \in H_0.$$

Berum þetta saman við þá réttarreglu að sakborningur er saklaus nema sýnt sé fram á að sekt sé hafin yfir skynsamlegan vafa. Þessi regla setur í forgang að forðast sakfellingarvillu.

DÓMUR	sakleysi	sekt
sýknun	rétt	sýknunarvilla
sakfelling	sakfellingarvilla	rétt

Erfiðara er að fást við villu af gerð II. ***Fastheldnis-líkurnar***

$$\beta(\theta) = \mathbf{P}_\theta(D \in [a_\alpha, b_\alpha])$$

eru $\geqslant 1 - \alpha$ þegar $\theta \in H_0$ en ekki er svigrúm til að setja lágt þak á $\beta(\theta)$ þegar $\theta \in H_1$ (á villulíkurnar).

Í prófunum hér að framan er $\beta(\theta)$ nálægt $1-\alpha$ þegar θ er nálægt H_0 og lækkar svo niður að 0 þegar θ fjarlægist H_0. Sjá dæmi á næstu síðu.

Dæmi um útleiðslu á $\beta(\mu)$ og ákvörðun á n

Skoðum aftur úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ þar sem σ^2 er þekkt. Þegar tilgáturnar voru

$$\mathrm{H}_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad \text{og} \qquad \mathrm{H}_1: \quad \mu > \mu_0$$

fékkst tilgátuprófið: Höfnum H_0 með kröfu α ef

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \,.$$

Fastheldnislíkurnar (þegar rétti stikinn er μ) eru því

$$\beta(\mu) = \mathbf{P}_\mu\Big(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_\alpha\Big)$$

svo

$$\beta(\mu) = \mathbf{P}_\mu\Big(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_\alpha\Big) = \mathbf{P}_\mu\Big(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)$$

Nú er $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ svo (með $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ að venju)

$$\beta(\mu) = \mathbf{P}\Big(Z \leqslant z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big).$$

Þessa niðurstöðu má nota til að ákvarða hvað n þarf að vera stórt til að fá fyrirframákveðið þak δ á $\beta(\mu)$ fyrir tiltekið $\mu > \mu_0$: Setjum $\beta(\mu) \leqslant \delta$

þ.e. $\mathbf{P}\big(Z \leqslant z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\big) \leqslant \delta$ þ.e. $z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant -z_\delta$

þ.e. $z_\alpha + z_\delta \leqslant \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ þ.e. $\frac{z_\alpha+z_\delta}{\mu-\mu_0}\,\sigma \leqslant \sqrt{n}.$

Þegar $\mu > \mu_0$ er því

$$\beta(\mu) \leqslant \delta \text{ ef og aðeins ef } n \geqslant \Big(\frac{z_\alpha+z_\delta}{\mu-\mu_0}\,\sigma\Big)^2.$$

Athugasemd um villu af gerð I og II: Fastheldnislíkurnar $\beta(\theta)$ kallast fastheldnis*hætta* þegar $\theta \in H_1$. Höfnunarlíkurnar $1-\beta(\theta)$ kallast *styrkur* þegar $\theta \in H_1$ en höfnunar*hætta* þegar $\theta \in H_0$ (þá er $1-\beta(\theta) \leqslant \alpha$).

p-gildi

Fororð: Því minna sem α er, þeim mun sterklegar bendir höfnun H_0 til að H_0 sé röng. Því stærra sem α er, þeim mun minni ástæða er til að efast um að H_0 sé sönn þegar H_0 er ekki hafnað.

Skoðum tilgátupróf með kröfu $0 < \alpha < 1$, prófstærð

$$D = d(X_1, \ldots, X_n)$$

og höfnunarmörk $-\infty \leqslant a_\alpha < b_\alpha \leqslant \infty$, þ.e.

$$\mathbf{P}_\theta(D \notin [a_\alpha, b_\alpha]) \leqslant \alpha, \quad \theta \in H_0.$$

Tilgátunni $\mathrm{H}_0 : \theta \in H_0$ er þá hafnað með kröfu α ef

$$d(x_1, \ldots, x_n) \notin [a_\alpha, b_\alpha].$$

Látum bilið $[a_\alpha, b_\alpha]$ vaxa þegar α lækkar. Lægsta gildi á α sem er þannig að $d(x_1, \ldots, x_n) \notin [a_\alpha, b_\alpha]$ kallast

p-gildi athugaða úrtaksins $x_1, \ldots, x_n$.

Takið eftir að p-gildið er lýsitala, fall af $x_1, \ldots, x_n$.

Tilgátunni H_0 er hafnað með kröfu α ef og aðeins ef

$x_1, \ldots, x_n$ hefur p-gildi $< \alpha$.

Lágt p-gildi bendir því til að H_0 sé röng.

Athugasemd: Harðir hlutlægnisinnar telja að til að forðast geðþóttaákvarðanir eigi að ákveða marktektarkröfu α áður en gögn eru skoðuð. Þetta er í samræmi við réttarsamlíkinguna sem nefnd var í upphafi þessarar umfjöllunar um tilgátupróf, að ákveða ekki sönnunarbyrðina eftir á.

Hinsvegar eru þau sem telja eðlilegt og oft nauðsynlegt að athuga gögnin fyrst, og þá gjarnan p-gildið.

Nokkur p-gildi – Úrtak úr $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Þegar σ^2 er þekkt er prófstærðin $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$.
Látum $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ vera óháða henni.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu α ef $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$.

Það α sem skilur milli höfnunar/ekki-höfnunar uppfyllir því $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = z_{\alpha/2}$ sem ásamt $\alpha = \mathbf{P}(|Z| > z_{\alpha/2})$ gefur p-gildið $= \mathbf{P}\big(|Z| > \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\big) = 2\big(1 - \Phi\big(\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\big)\big)$.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \leqslant \mu_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$.

Þá er p-gildið $= \mathbf{P}\big(Z > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\big) = 1 - \Phi\big(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\big)$.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \geqslant \mu_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$

Höfnum H_0 með kröfu α ef $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$.

Þá er p-gildið $= \mathbf{P}\big(Z < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\big) = \Phi\big(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\big)$.

Þegar σ^2 er óþekkt er prófstærðin $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$.
Látum $T_{n-1} \sim \mathrm{t}_{n-1}$ vera óháð henni.
Fáum eftirfarandi p-gildi á sama hátt og fyrir ofan.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \ \mu = \mu_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$

Þá er p-gildið $= \mathbf{P}\big(|T_{n-1}| > \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\big)$.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \leqslant \mu_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$

Þá er p-gildið $= \mathbf{P}\big(T_{n-1} > \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\big)$.

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ (eða $\mu \geqslant \mu_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$

Þá er p-gildið $= \mathbf{P}\big(T_{n-1} < \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\big)$.

AÐHVARFSGREINING

Yfirlit yfir myndskeið og efni

Styttingar í yfirliti eru í samræmi við eftirfarandi dæmi:

T01 fyrsta myndskeið um tölfræði

12:21 12 mínútur og 21 sekúnda

Töl 1 fyrsta síða í þessu hefti – þ.e. fyrsta síða **í lit**

LÍNULEGT AÐHVARF – Einfalt líkan

Í framhaldinu er α skurðpunktur óþekktrar línu við y-ásinn og β hallatalan. Verkefnið er að álykta um línuna á grundvelli eftirfarandi ***aðhvarfslíkans***. Látum

$$(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$$

vera þannig að $x_1, \ldots, x_n$ eru óslembnar ***skýribreytur*** og

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

þar sem ***slembifrávikin*** $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ eru óháð og

$$\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 \text{ óþekkt.}$$

Af þessu leiðir að $Y_1, \ldots, Y_n$ eru óháð og

$$Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, \sigma^2).$$

Óþekktu stikarnir eru þrír: α, β, σ^2. Við leiðum út sennileikamat, bilmat og tilgátupróf. Loks myndum við spábil fyrir nýtt y_{n+1} þegar skýribreytan er x_{n+1}.

Aths: Skýribreyturnar $x_1, \ldots, x_n$ eru annaðhvort ákvarðaðar fyrirfram eða koma í ljós í tilrauninni.

Væntigildin $\mathbf{E}[Y_i] = \alpha + \beta x_i$ liggja á óþekktu línunni.

Ef vitað væri að $\beta = 0$ hefðu x-in engin áhrif á Y-in sem þá væru bara venjulegt úrtak úr $\mathrm{N}(\alpha, \sigma^2)$.

Athugasemd: Líkanið hér að ofan (sem við höldum okkur við, sjá þó öftustu síðu) kallast ***einfalt línulegt aðhvarf***. Margfalt línulegt aðhvarf er á forminu
$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_r x_{ir} + \epsilon_i$ þ.e. $Y_i = \alpha + \boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_i + \epsilon_i$
Enn almennara línulegt aðhvarf er $\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i$ þar sem $\mathbf{Y}_i, \boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{\epsilon}_i$ eru vigrar og $\boldsymbol{\beta}$ og $\mathbf{X}_i$ eru fylki.

Aðferð minnstu fervika

Áður en við höldum lengra skulum við skoða gamalgróna aðferð til að leggja línu í gegnum punktasafn

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

án aðstoðar líkindafræði.

Línan $y = a + bx$ er valin þannig að fervikasumman

$$\sum_i (y_i - a - bx_i)^2$$

er lágmörkuð sem fall af a og b. Lágmarkið finnst með því að setja hlutafleiðurnar $= 0$:

$$-2\sum_i (y_i - a - bx_i) = 0 \quad \text{og} \quad -2\sum_i x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

þ.e.

$$a\,n + b\sum_i x_i = \sum_i y_i \quad \text{og} \quad a\sum_i x_i + b\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

þ.e.

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{og} \quad a\,n\bar{x} + b\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

Setjum nú fyrri jöfnuna inn í þá síðari

$$(\bar{y} - b\bar{x})n\bar{x} + b\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

þ.e.

$$-b\,n\bar{x}^2 + b\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$$

Lína minnstu fervika $y = a + bx$ er því með stuðlana

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad \text{og} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Það merkilega er að þessi a og b reynast líka vera sennileikamatið á α og β í normlega aðhvarfslíkaninu sem við erum að fjalla um, sjá næstu síðu.

Sennileikamat á α, β og σ^2

Látum frá og með nú

$y_1, \ldots, y_n$ **vera athuguð gildi á** $Y_1, \ldots, Y_n$.

Þar eð $Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$ **þá er þéttleikinn í** $y = y_i$

$$f_{\alpha,\beta,\sigma^2}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}.$$

Þar eð $Y_1,\ldots,Y_n$ **eru óháð fæst sennileiki** $(\alpha, \beta, \sigma^2)$ **með því að margfalda þessa þéttleika saman**

$$L(\alpha,\beta,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}.$$

Tökum logrann

$$\ln L(\alpha,\beta,\sigma^2) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (y_i - \alpha - \beta x_i)^2.$$

Fyrir sérhvert σ^2 hámarkast þetta fall í þeim gildum sem lágmarka fervikasummuna $\sum_i (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ þ.e. í $\hat{\alpha} = a$ og $\hat{\beta} = b$, – sjá síðuna hér á undan.

Til að ákvarða $\hat{\sigma}^2$ setjum við nú $\frac{d}{d\sigma^2} \ln L(a, b, \sigma^2) = 0$ þ.e.

$$\frac{-n}{2}(\sigma^2)^{-1} + \frac{1}{2}(\sigma^2)^{-2} \sum (y_i - a - bx_i)^2 = 0.$$

Margföldun með $\frac{-2}{n}(\sigma^2)^2$ gefur að hámarkið er tekið í

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - a - bx_i)^2.$$

Sennileikamatið á β er $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = b$

Sennileikamatið á α er $\hat{\alpha} = \bar{y} - b\bar{x} = a$

Sennileikamatið á σ^2 er $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - a - bx_i)^2$

Sennileikametlarnir fyrir α, β og σ^2

Sennileikamatið á síðunni hér á undan gefur nú að sennileikametlarnir eru *metlar minnsta ferviks*:

Sennileikametillinn fyrir β er $B = \dfrac{\sum_i x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}$

Sennileikametillinn fyrir α er $A = \bar{Y} - B\bar{x}$

Sennileikametillinn fyrir σ^2 er $\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - A - Bx_i)^2$

Næsta regla gildir án normlega skilyrðisins ef ϵ-in eru óháð (fylgnilaus dugar) og $\mathbf{E}[\epsilon_i] = 0$, $\mathrm{Var}[\epsilon_i] = \sigma^2$.

Regla: $\mathbf{E}[B] = \beta$ og $\mathrm{Var}[B] = \dfrac{1}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}\,\sigma^2$

$\mathbf{E}[A] = \alpha$ og $\mathrm{Var}[A] = \left(\dfrac{\sum_i x_i^2}{n(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2)}\right)\sigma^2$

$\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - A - Bx_i)^2\right] = \frac{n-2}{n}\,\sigma^2$ (bjagaður)

Sönnun:

$$\mathbf{E}[B] = \mathbf{E}\left[\frac{\sum_i x_i Y_i - \bar{x}\sum_i Y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\right] = \frac{\sum (x_i - \bar{x})\mathbf{E}[Y_i]}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i)}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\alpha\sum (x_i - \bar{x}) + \beta\sum (x_i - \bar{x})x_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\beta\sum (x_i - \bar{x})x_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \beta\,\frac{\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = \beta$$

$$\mathrm{Var}[B] = \mathrm{Var}\left[\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}\right] = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2\mathrm{Var}[Y_i]}{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)^2} \quad \text{(óhæði)}$$

$$= \frac{\sigma^2\sum (x_i - \bar{x})^2}{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \left(\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$\mathbf{E}[A] = \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{E}[Y_i] - \mathbf{E}[B]\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i (\alpha + \beta x_i) - \beta\bar{x} = \alpha$$

Restin er sönnuð á sama hátt en með meira vafstri.

S_{xx} S_{xY} S_{YY} SS_{R} – Dreifing A, B og SS_{R}

Til að létta á formúlunum eru hér tákn fyrir þrjár summur, allar á tveim auð-út-leiðanlegum formum:

$$\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2 = S_{\mathsf{xx}} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sum_i x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y} = S_{\mathsf{xY}} = \sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$$

$$\sum_i Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = S_{\mathsf{YY}} = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$$

Setjum líka (sem er aðeins meira maus að leiða út)

$$\sum_{i=1}^{n} \big(Y_i - A - Bx_i\big)^2 = SS_{\mathsf{R}} = \frac{S_{\mathsf{xx}}S_{\mathsf{YY}} - S_{\mathsf{xY}}^2}{S_{\mathsf{xx}}}$$

Framundan eru bilmat og tilgátupróf sem byggja á reglunni hér fyrir neðan. Hún verður ekki sönnuð hér en látið nægja að nefna eftirfarandi.

Sennileikametlarnir A og B fyrir α og β eru línulegar samantektir á óháðum normlegum $Y_1, \ldots, Y_n$ og eru því báðir normlegir. Væntigildi þeirra og dreifni er að finna í reglunni á síðunni hér á undan. (Takið eftir að A og B eru óbjagaðir og líka að $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n-2}SS_{\mathsf{R}}\right] = \sigma^2$.)

Regla: Ef $Y_1, \ldots, Y_n$ eru óháð og $Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i,\, \sigma^2)$ þá er

$$B = S_{\mathsf{xY}}/S_{\mathsf{xx}} \sim \mathrm{N}\Big(\beta,\, \frac{1}{S_{\mathsf{xx}}}\,\sigma^2\Big)$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{x} \sim \mathrm{N}\Big(\alpha,\, \frac{\sum_i x_i^2}{n\,S_{\mathsf{xx}}}\,\sigma^2\Big)$$

$$SS_{\mathsf{R}}/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$$

Ennfremur eru A og B óháð fervikasummunni SS_{R}.

Bilmat og tilgátupróf fyrir β

Setjum $Z = \frac{B-\beta}{\sqrt{\frac{1}{S_{\mathsf{xx}}}\sigma^2}}$, $Y = SS_{\mathsf{R}}/\sigma^2$ og $r = n-2$ inn í skilgreininguna á t_r-stærð $= \frac{Z}{\sqrt{Y/r}} = \frac{B-\beta}{\sqrt{\frac{1}{S_{\mathsf{xx}}} SS_{\mathsf{R}}/(n-2)}}$.

Það gefur $\sqrt{\frac{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{R}}}}\,(B-\beta) \sim \mathrm{t}_{n-2}$ (sjá síðustu reglu).

Notum þessa stærð í stað $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ í útleiðslunni á annarri síðu um bilmat (og $t_{\gamma,\,n-2}$ í stað z_α):

Tvíhliða: $\beta = b \pm t_{\gamma/2,\,n-2}\sqrt{\frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Efra: $\beta \geqslant b - t_{\gamma,\,n-2}\sqrt{\frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Neðra: $\beta \leqslant b + t_{\gamma,\,n-2}\sqrt{\frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Hér er $SS_{\mathsf{r}} = \sum_i \big(y_i - a - bx_i\big)^2$ = athugað gildi á SS_{R}.

Látum β_0 vera eitthvert tiltekið gildi á β, t.d. $\beta_0 = 0$

Prófstærð: $\sqrt{\frac{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{R}}}}\,(B-\beta_0)$ sem er $\sim \mathrm{t}_{n-2}$ ef $\beta = \beta_0$

Förum eins að og á annarri síðu um tilgátupróf:

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0:\ \beta = \beta_0$ $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1:\ \beta \neq \beta_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\frac{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}}}\,|b-\beta_0| > t_{\gamma/2,\,n-2}$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \beta = \beta_0$ (eða $\beta \leqslant \beta_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \beta > \beta_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\frac{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}}}\,(b-\beta_0) > t_{\gamma,\,n-2}$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \beta = \beta_0$ (eða $\beta \geqslant \beta_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \beta < \beta_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\frac{(n-2)S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}}}\,(b-\beta_0) < -t_{\gamma,\,n-2}$

Bilmat og tilgátupróf fyrir α

Setjum $Z = \dfrac{A-\alpha}{\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n\,S_{\mathsf{xx}}}\,\sigma^2}}$, $Y = SS_{\mathsf{R}}/\sigma^2$ og $r = n-2$ inn í skilgreininguna á t_r-stærð $= \dfrac{Z}{\sqrt{Y/r}} = \dfrac{A-\alpha}{\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n\,S_{\mathsf{xx}}}\,SS_{\mathsf{R}}/(n-2)}}$.

Það gefur $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{R}}\,\sum_i x_i^2}}\,(A-\alpha) \sim \mathrm{t}_{n-2}$ (sjá síðustu reglu).

Notum þessa stærð í stað $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ í útleiðslunni á annarri síðu um bilmat (og $t_{\gamma,\,n-2}$ í stað z_α):

Tvíhliða: $\alpha = a \pm t_{\gamma/2,\,n-2}\sqrt{\dfrac{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Efra: $\alpha \geqslant a - t_{\gamma,\,n-2}\sqrt{\dfrac{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Neðra: $\alpha \leqslant a + t_{\gamma,\,n-2}\sqrt{\dfrac{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}}$ $\quad (1-\gamma)100\%$

Hér er $SS_{\mathsf{r}} = \sum_i \big(y_i - a - bx_i\big)^2$ = athugað gildi á SS_{R}.

Látum α_0 vera eitthvert tiltekið gildi á α, t.d. $\alpha_0 = 0$

Prófstærð: $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{R}}\,\sum_i x_i^2}}\,(A-\alpha_0)$ sem er $\sim \mathrm{t}_{n-2}$ ef $\alpha = \alpha_0$

Förum eins að og á annarri síðu um tilgátupróf:

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \ \alpha = \alpha_0 \quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \ \alpha \neq \alpha_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}}\,|a-\alpha_0| > t_{\gamma/2,\,n-2}$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \alpha = \alpha_0$ (eða $\alpha \leqslant \alpha_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \alpha > \alpha_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}}\,(a-\alpha_0) > t_{\gamma,\,n-2}$

Tilgátur $\quad \mathrm{H}_0: \alpha = \alpha_0$ (eða $\alpha \geqslant \alpha_0$) $\quad$ og $\quad \mathrm{H}_1: \alpha < \alpha_0$

Höfnum H_0 með kröfu γ ef $\sqrt{\dfrac{(n-2)\,n\,S_{\mathsf{xx}}}{SS_{\mathsf{r}}\,\sum_i x_i^2}}\,(a-\alpha_0) < -t_{\gamma,\,n-2}$

Öryggisbil fyrir línuna $\alpha + \beta x$ í $x = x_0$

Metillinn $A + Bx_0$ fyrir $\alpha + \beta x_0$ í tilteknu $x = x_0$ er bjagalaus: $\mathbf{E}[A + Bx_0] = \mathbf{E}[A] + \mathbf{E}[B]\, x_0 = \alpha + \beta x_0$. Hann er normlegur því hann er línuleg samantekt á óháðum normlegum $Y_1, \ldots, Y_n$. Ákvörðum nú dreifnina til að geta staðlað hann og myndað öryggisbil.

Nú er $B = \frac{1}{S_{\mathsf{xx}}} \sum (x_i - \bar{x}) Y_i$ og $A = \frac{1}{n} \sum Y_i - B\bar{x}$ svo

$$\begin{aligned} A + Bx_0 &= \tfrac{1}{n} \sum Y_i - B(\bar{x} - x_0) \\ &= \tfrac{1}{n} \sum Y_i - \tfrac{1}{S_{\mathsf{xx}}} \sum (x_i - \bar{x}) Y_i (\bar{x} - x_0) \\ &= \sum \Big(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{S_{\mathsf{xx}}} (x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) \Big) Y_i \end{aligned}$$

Þar eð $Y_1, \ldots, Y_n$ eru óháðar og $\mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$ fæst

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[A + Bx_0] &= \sigma^2 \sum \Big(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{S_{\mathsf{xx}}} (x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) \Big)^2 \\ &= \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \frac{(\bar{x} - x_0)}{S_{\mathsf{xx}}} (x_i - \bar{x}) + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}^2} (x_i - \bar{x})^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} \frac{(\bar{x} - x_0)}{S_{\mathsf{xx}}} \sum (x_i - \bar{x}) + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} - 0 + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) \sigma^2 \end{aligned}$$

Því er $\dfrac{(A + Bx_0) - (\alpha + \beta x_0)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) SS_{\mathsf{R}} / (n-2)}} \sim \mathrm{t}_{n-2}$. Fáum eins og fyrr

$$\alpha + \beta x_0 = a + bx_0 \pm t_{\gamma/2,\, n-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) \frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)}} \quad (1-\gamma)100\%$$

$$\alpha + \beta x_0 \geqslant a + bx_0 - t_{\gamma,\, n-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) \frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)}} \quad (1-\gamma)100\%$$

$$\alpha + \beta x_0 \leqslant a + bx_0 + t_{\gamma,\, n-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{\mathsf{xx}}} \right) \frac{SS_{\mathsf{r}}}{(n-2)}} \quad (1-\gamma)100\%$$

Spábil fyrir nýtt y_{n+1}

Við myndum loks ***spábil*** fyrir **óþekkt** y_{n+1} þegar skýribreytan er x_{n+1}. Látum

$$Y_{n+1} = \alpha + \beta\, x_{n+1} + \epsilon_{n+1}$$

þar sem $\epsilon_{n+1} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ og óháð $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$.

Þá er Y_{n+1} óháð $A + Bx_{n+1}$ og

$$Y_{n+1} \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta\, x_{n+1},\, \sigma^2).$$

Samkvæmt síðunni hér á undan (með $x_0 = x_{n+1}$) er

$$A + Bx_{n+1} \sim \mathrm{N}\Big(\alpha + \beta\, x_{n+1},\, \big(\tfrac{1}{n} + \tfrac{(\overline{x} - x_{n+1})^2}{S_{\mathsf{xx}}}\big)\sigma^2\Big).$$

Saman gefur þetta

$$Y_{n+1} - (A + Bx_{n+1}) \sim \mathrm{N}\Big(0,\, \big(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{(\overline{x} - x_{n+1})^2}{S_{\mathsf{xx}}}\big)\sigma^2\Big).$$

Þessi stærð er óháð SS_{R} þar eð Y_{n+1} og $A + Bx_{n+1}$ eru óháðar SS_{R}. Ef við stöðlum $Y_{n+1} - (A + Bx_{n+1})$ og skiptum út σ^2 á móti $SS_{\mathsf{R}}/(n-2)$ fæst því

$$\frac{Y_{n+1} - (A + Bx_{n+1})}{\sqrt{c_{\mathsf{x}}\, SS_{\mathsf{R}}/(n-2)}} \sim \mathrm{t}_{n-2}$$

þar sem

$$c_{\mathsf{x}} = \big(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{(\overline{x} - x_{n+1})^2}{S_{\mathsf{xx}}}\big).$$

Fáum á sama hátt og áður

$$y_{n+1} = a + bx_{n+1} \pm t_{\gamma/2,\, n-2}\sqrt{c_{\mathsf{x}}\, SS_{\mathsf{r}}/(n-2)} \quad (1-\gamma)100\%$$

$$y_{n+1} \geqslant a + bx_{n+1} - t_{\gamma,\, n-2}\sqrt{c_{\mathsf{x}}\, SS_{\mathsf{r}}/(n-2)} \quad (1-\gamma)100\%$$

$$y_{n+1} \leqslant a + bx_{n+1} + t_{\gamma,\, n-2}\sqrt{c_{\mathsf{x}}\, SS_{\mathsf{r}}/(n-2)} \quad (1-\gamma)100\%$$

Margfeldisáhrifum breytt í línuleg

Það er nokkuð algengt að áhrif skýribreytu á mælingar séu margfeldisleg en ekki línuleg. Dæmi um það er skýribreytan 'ártal' og mælingin 'verðlag'. Hér eru tvö margfeldislíkön sem með logrun breytast í einfalt línulegt aðhvarf eins og hér að framan

$$Y_i = \alpha + \beta\, x_i + \epsilon_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (*)$$

Fyrra líkanið: Látum $\kappa > 0$, $-\infty < \beta < \infty$ og $\sigma^2 > 0$ vera óþekkta stika, $s_1, \ldots, s_n$ óslembnar skýribreytur og $v_1, \ldots, v_n$ athuguð gildi á slembistærðunum

$$V_i = \kappa\, s_i^{\beta}\, e^{\epsilon_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

þar sem $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ eru óháð og öll $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

Tökum logrann og fáum einfalt línulegt aðhvarf $(*)$ með β, σ^2, ϵ_i óbreytt og

$$Y_i = \ln V_i \qquad \alpha = \ln \kappa \qquad x_i = \ln s_i \qquad y_i = \ln v_i$$

Síðara líkanið: Látum $\kappa > 0$, $-\infty < \beta < \infty$ og $\sigma^2 > 0$ vera óþekkta stika, $x_1, \ldots, x_n$ óslembnar skýribreytur og $w_1, \ldots, w_n$ athuguð gildi á slembistærðunum

$$W_i = \kappa\, e^{\beta\, x_i + \epsilon_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

þar sem $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ eru óháð og öll $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

Tökum logrann og fáum einfalt línulegt aðhvarf $(*)$ með β, x_i, σ^2, ϵ_i óbreytt og

$$Y_i = \ln W_i \qquad \alpha = \ln \kappa \qquad y_i = \ln w_i$$

Mat og próf fyrir α, β, σ^2 liggja fyrir hér að framan. Niðurstöður fyrir κ fást með því að nota $\kappa = e^{\alpha}$.